$\mathcal{E}$-MARTINGAALIT JA NIIDEN SOVELLUKSIA

Pro Gradu -tutkielma

MIKA SIRVIÖ

hyväksytty 2. helmikuuta 2004

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

SISÄLTÖ

I. JOHDANTO

Todennäköisyysteorian synty oli pitkälle uhkapeleistä peräisin olevien ongelmien inspiroima. Ensimmäiset viitteet todennäköisyysteoriaan löytyvätkin G. Cardanon uhkapelejä käsittelevästä teoksesta Liber de Ludo Aleae [7]. Historioitsijat ovat kuitenkin hyvin yksimielisiä siitä, että todennäköisyysteoria itsenäisenä oppialana alkoi B. Pascalin ja P. de Fermat'n välisestä kirjeenvaihdosta [58], erityisesti heidän ratkaistuaan vuonna 1654 ongelman panosten jaosta pelaajien kesken pelin jäädessä kesken.

Tämän jälkeen todennäköisyysteoria kehittyi monella osa-alueellaan mutta ennen 1900-luvun alkua siltä puuttui silti vielä täsmällinen matemaattinen pohja. Tämä tilanne oli väistämätön, koska todellisen maailman tapahtumia kuvaavan todennäköisyyden käsitteen täsmällisen formuloinnin mahdollistavaa mittateoriaa ei oltu vielä keksitty.

Mittateorian kehityksen aloitti H. Lebesguen väitöskirja [49], joka laajensi tilavuuden käsitteen avaruudessa $\mathbb{R}^n$ Borelin joukkoihin. Kuitenkin kului vielä 28 vuotta ennenkuin mittateoria oli tarpeeksi kehittynyt ollakseen riittävä todennäköisyysteorian matemaattiseksi perustaksi. Viimeinen olennainen tulos, jota A. N. Kolmogorov tarvitsi esittäessään todennäköisyyden mittateoreettiset perusteet vuonna 1933 [47], oli Radonin ja Nikodýmin lause [56].

Ensimmäisestä todennäköisyysteorian finanssisovelluksesta on vastuussa L. Bachelier [3]. Hän yritti osana väitöskirjaansa mallintaa Pariisin pörssin käytöstä Brownin liikkeen avulla, jota hän oli approksimoinut satunnaiskävelyllä sekä johtanut siihen liittyviä jakaumia. Vaikkakin kyseisen stokastisen prosessin olemassaolon todisti vasta N. Wiener vuonna 1923 [66].

Tässä tutkielmassa toinen luku on tarkoitettu erittäin tiiviiksi johdannoksi stokastisten prosessien yleiseen teoriaan, niiltä osin kuin sitä välttämättä tarvitaan myöhemmissä luvuissa. Siinä esitetyt tulokset ovat olleet tunnettuja viimeisten kolmenkymmenen vuoden ajan. Luku III jatkaa käsitellen stokastisen analyysin yhtä tärkeimmistä työkaluista, stokastista integraalia. Stokastinen integraali konstruoidaan semimartingaaleille, jotka saavat arvonsa avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Mielenkiinnon kohteena stokastinen integrointi on ollut jo pitkään, ensimmäisen määritelmän stokastiselle integraalille esitti K. Itô [38], [39] 1940-luvulla.

Neljännessä luvussa tutustutaan aluksi stokastisen differentiaaliyhtälön $Z = 1 + Z_- \cdot X$ ratkaisuun, stokastiseen eksponenttiin $\mathcal{E}(X)$. Tätä yhtälöä tarkastelemalla C. Doléans-Dade [25] aloitti semimartingaalien stokastisten differentiaaliyhtälöiden tutkimuksen. Tämän prosessin ominaisuuksiin tutustumisen jälkeen määritellään stokastisten prosessien luokka $\mathcal{E}$-martingaalit, jota tutkivat ensimmäisinä T. Choulli, L. Krawczyk ja C. Stricker [14]. He myös laajensivat Doobin epäyhtälön sekä Burkholderin, Davisin ja Gundyn epäyhtälöt [15] $\mathcal{E}$-martingaalien luokalle.

Edellisissä luvuissa käsitellyllä teorialla on sovelluksia matemaattisessa rahoitusteoriassa liittyen johdannaisten suojaukseen epätäydellisissä markkinamalleissa, joissa johdannaisia kuvataan satunnaismuuttujilla $H \in L^p$ ja arvopapereiden hintoja d-ulotteisilla semimartingaaleilla X. Tärkeiksi ongelmiksi osoittautuvat projisointi stokastisten integraalien muodostamalle avaruudelle $\mathcal{G}_T(\Theta) = \{(\theta \cdot X)_T \mid \xi \in \Theta\}$, jossa avaruus Θ muodostuu sopivat integroituvuusehdot täyttävistä prosesseista, sekä kysymys siitä, milloin satunnaismuuttujalle $H \in L^2$ on olemassa hajotelma

$$H = H_0 + (\xi^H \cdot X)_T + L_T,$$

jossa L_H on hintaprosessin X kanssa ortogonaalinen martingaali. Tätä hajotelmaa kutsutaan satunnaismuuttujan H Föllmerin ja Schweizerin hajotelmaksi semimartingaalin X suhteen. Projisointiongelman kohdalla on luonnollisesti olennaista tietää, milloin avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta)$ on suljettu avaruudessa L^p. Viimeinen luku on omistettu näiden kysymysten tarkastelulle.

II. MERKINTÖJÄ JA MÄÄRITELMIÄ

Tarkoituksena on esittää ensimmäiseksi lyhyt katsaus stokastisten prosessien yleiseen teoriaan, joka käsittelee joukon $\mathbb{R}_+$ indeksoimia stokastisia prosesseja. Tilan puutteesta johtuen tyydytään tiiviiseen ilmaisuun ja vähäiseen määrään esimerkkejä. Tässä esityksessä käytetään stokastisen analyysin peruskäsitteitä ja -tuloksia, jotka on esitetty esimerkiksi Hen, Wangin ja Yanin [37], Jacodin ja Shiryaevin [42], Dellacherien ja Meyerin [23] sekä Jacodin [40] kirjoissa. Näistä teoksista löytyvät myös kaikki tässä selittämättömät merkinnät.

Prosessit ja pysäytyshetket

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ täydellinen todennäköisyysavaruus.

Määritelmä II.1. Historia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ on kasvava kokoelma σ-algebroja: kaikille $0 \leq s < t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Määritellään

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, t \geq 0, \tag{II.1}$$

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s), t > 0 \quad ja \tag{II.2}$$

$$\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_{\infty-} = \mathcal{F}_\infty. \tag{II.3}$$

Historia $\mathbb{F}$ on oikealta jatkuva, jos kaikille $t \geq 0, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$. Historian $\mathbb{F}$ sanotaan täyttävän tavalliset ehdot, jos $\mathbb{F}$ on oikealta jatkuva ja $\mathcal{F}_0$ sisältää kaikki $\mathbb{P}$-nollamitalliset joukot.

Määritelmä II.2. Stokastinen prosessi X on $\mathbb{F}$-sopiva, jos kaikille $t \geq 0$, X_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen. Prosessi $X = (X_t)_{t\geq 0}$ on jatkuva, jos sen polut, $t \mapsto X_t(\omega)$, ovat melkein varmasti jatkuvia. Prosessilla X on D-polut[1], jos sen polut ovat melkein varmasti oikealta jatkuvia, $X_{t+}(\omega) = X_t(\omega)$, ja sillä on melkein varmasti äärelliset vasemmanpuoleiset raja-arvot, $X_{t-} = \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$. Stokastiset prosessit X ja Y ovat erottamattomat, jos

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t : \forall 0 \leq t < \infty] = 1. \tag{II.4}$$

[1] Stokastisille prosesseille, joilla on D-polut käytetään kirjallisuudessa myös merkintöjä càdlàg (continu à droite avec des limites à gauche) ja RCLL (right continuous with left limits).

Määritelmä II.3. Joukkoa A kutsutaan häviäväksi, jos joukko $\{\omega \mid \exists t \in \mathbb{R}_+,\ jolla\ (\omega, t) \in A\}$ on $\mathbb{P}$-nollamittainen. Kahta prosessia X ja Y kutsutaan erottamattomiksi, jos joukko $\{X \neq Y\} = \{(\omega, t) \mid X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ on häviävä, eli jos prosessien X ja Y melkein kaikki polut ovat samoja.

Huomautus. Jos prosessit X ja Y ovat erottamattomat, on kaikilla ajanhetkillä $t \in \mathbb{R}_+$ voimassa $X_t = Y_t$ melkein varmasti mutta käänteinen väittämä ei ole tosi. Kuitenkin jos kummallakin prosesseista X ja Y on vasemmalta tai oikealta jatkuvat polut, on käänteinenkin väittämä voimassa.

Määritelmä II.4. $\mathbb{F}$-sopiva stokastinen prosessi X on $\mathbb{F}$-martingaali (vastaavasti $\mathbb{F}$-ylimartingaali, $\mathbb{F}$-alimartingaali), jos kaikille $t \geq 0$, X_t on integroituva, ja kaikille $0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad (vastaavasti \leq X_s, \geq X_s) \quad m.v.. \tag{II.5}$$

Kaikkien tasaisesti integroituvien martingaalien joukkoa merkitään $\mathcal{M}$.

Nimitys martingaali on peräisin ranskankielisestä nimestä uhkapelistrategialle, jossa panos tuplataan joka kierroksella kunnes saavutetaan voitto. Jos tällaisessa tilanteessa pelaajan varallisuutta kuvaava prosessi X_n on martingaali, on pelaajan keskimääräinen varallisuus seuraavan pelin jälkeen sama kuin nykyinen varallisuus. Peli on siis silloin reilu. Ensimmäisenä martingaaleja käytti eksplisiittisesti J. Ville [65].

Alimartingaaleille on voimassa tunnettu Doobin epäyhtälö.

Lause II.5. *Jos $p > 1$ ja q ovat Hölderin liittolukuja, niin kaikille positiivisille alimartingaaleille X on voimassa*

$$\|X^*\|_p \leq q \sup_t \|X_t\|_p.$$

Todistus. [60] I.2 Thm. 20 □

Määritelmä II.6. Pysäytyshetki on kuvaus $\tau : \Omega \to [0, \infty]$, jolla kaikilla $t \in \mathbb{R}_+$ joukko $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Jos τ on pysäytyshetki, merkitään kaikkien joukkojen $A \in \mathcal{F}$, joilla $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \in \mathbb{R}_+$, joukon muodostamaa σ-algebraa $\mathcal{F}_\tau$. Merkitään kaikkien joukkojen $A \in \mathcal{F}$, joilla $A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \in \mathbb{R}_+$, joukon ja σ-algebran $\mathcal{F}_0$ generoimaa σ-algebraa $\mathcal{F}_{\tau-}$.

σ-algebra $\mathcal{F}_t$ tulkitaan yleensä kuvaavan olevan niiden tapahtumien joukko, jotka ovat sattuneet ennen tai viimeistään hetkellä t. Pysäytyshetki on siis satunnainen ajanhetki, jolla on se ominaisuus, että tapahtuma "τ on tapahtunut hetkeen t mennessä"riippuu vain historiasta hetkeen t saakka eikä informaatiosta hetkestä t eteenpäin. Vastaavasti $\mathcal{F}_\tau$ voidaan tulkita niiden tapahtumien joukkona, jotka ovat sattuneet ennen tai viimeistään hetkellä τ.

Pysäytyshetkillä on seuraavia ominaisuuksia.

Lause II.7. *Olkoot σ ja τ kaksi pysäytyshetkeä.*

i. $\sigma \wedge \tau$ *ja* $\sigma \vee \tau$ *ovat pysäytyshetkiä.*

ii. $\sigma \leq \tau \Rightarrow \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

iii. $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

iv. $\mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\vee\tau} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{F}_\sigma, B \in \mathcal{F}_\tau, A \cap B = \emptyset\}$.

Todistus. [37] Thm. 3.2, 3.4 □

Esimerkki II.8. *Millä tahansa pysäytyshetkellä* τ *ja reaaliluvulla* $s > 0$ *satunnaismuuttuja* $\tau + s$ *on pysäytyshetki. Lisäksi on hyvä huomata, että yleensä* $\tau - s$ *ei ole pysäytyshetki.*

Määritelmä II.9. Jos τ on pysäytyshetki ja $A \in \mathcal{F}$, niin pysäytyshetken τ rajoittuma joukolle A on $\tau_A(\omega) = \tau(\omega)$, kun $\omega \in A$, ja muulloin $\tau_A(\omega) = \infty$. Koska joukko $\{\tau_A \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\}$, on τ_A pysäytyshetki, jos ja vain jos joukko A kuuluu σ-algebraan $\mathcal{F}_\tau$.

Määritelmä II.10. Olkoot σ ja τ kaksi pysäytyshetkeä. Kutsutaan seuraavia satunnaisia joukkoja stokastisiksi väleiksi.

$$[\sigma, \tau] = \{(\omega, t) \mid t \in \mathbb{R}_+, \sigma(\omega) \leq t \leq \tau(\omega)\},$$

$$[\sigma, \tau[= \{(\omega, t) \mid t \in \mathbb{R}_+, \sigma(\omega) \leq t < \tau(\omega)\},$$
$$]\sigma, \tau] = \{(\omega, t) \mid t \in \mathbb{R}_+, \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\},$$
$$]\sigma, \tau[= \{(\omega, t) \mid t \in \mathbb{R}_+, \sigma(\omega) < t < \tau(\omega)\},$$

ja merkinnällä $[\tau]$ tarkoitetaan stokastista väliä $[\tau, \tau]$.

Määritelmä II.11. Olkoon $\mathcal{C}$ on luokka prosesseja. Määritellään lokalisoitu luokka $\mathcal{C}_{loc}$ seuraavasti. Prosessi X kuuluu luokkaan $\mathcal{C}_{loc}$, jos ja vain jos on olemassa kasvava jono pysäytyshetkiä (τ_n) ja $lim_n \tau_n = \infty$ melkein varmasti, joilla pysäytetty prosessi X^{τ_n} kuuluu luokkaan $\mathcal{C}$. Jonoa (τ_n) kutsutaan lokalisoivaksi jonoksi prosessille X luokan $\mathcal{C}$ suhteen. Selvästi on voimassa $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{loc}$.

Määritelmä II.12. Prosessin luokkaa $\mathcal{C}$ kutsutaan vakaaksi pysäyttämisen suhteen, jos kaikilla $X \in \mathcal{C}$ ja millä tahansa pysäytyshetkellä τ, pysäytetty prosessi X^τ kuuluu luokkaan $\mathcal{C}$.

Lemma II.13. *Olkoot* $\mathcal{C}$ *ja* $\mathcal{C}'$ *kaksi pysäyttämisen suhteen vakaata luokkaa. Silloin*

i. luokka $\mathcal{C}_{loc}$ *on vakaa pysäyttämisen suhteen ja* $(\mathcal{C}_{loc})_{loc} = \mathcal{C}_{loc}$ *ja*

ii. $(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}')_{loc} = \mathcal{C}_{loc} \cap \mathcal{C}'_{loc}$.

Todistus. [42] Lemma 1.35 □

Tämän lemman perusteella iteroimalla lokalisointia ei voida saada aikaan yhä laajempia prosessien luokkia. Hyvin usein tätä lemmaa käytetään tilanteessa, jossa $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ ja $\mathcal{C}''$ ovat pysäyttämisen suhteen vakaita luokkia ja jokaiseen prosessiin $X \in \mathcal{C}_{loc} \cap \mathcal{C}'_{loc}$ liitetään uusi prosessi $Y = \varphi(X)$, jolla on voimassa $\varphi(X^\tau) = \varphi(X)^\tau$ kaikilla pysäytyshetkillä τ. Jos silloin kaikilla prosesseilla $X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ pätee $\varphi(X) \in \mathcal{C}''_{loc}$, niin prosessi $\varphi(X)$ kuuluu luokkaan $\mathcal{C}''_{loc}$ myös kaikilla $X \in \mathcal{C}_{loc} \cap \mathcal{C}'_{loc}$.

Määritellään seuraavaksi lokaalit martingaalit.

Määritelmä II.14. Prosessi M on lokaalisti $\mathbb{F}$-martingaali, jos $M_0 \in \mathcal{F}_0$ ja on olemassa kasvava jono pysäytyshetkiä τ^n, $\tau^n \to \infty$, kun $n \to \infty$, jolla kaikilla n pysäytetty prosessi M^{τ^n} on $\mathbb{F}$-martingaali, missä $M_t^{\tau^n} = M_{t\wedge\tau^n} I_{\{\tau^n>0\}}$. Kaikkien lokaalien martingaalien joukkoa merkitään $\mathcal{M}_{loc}$.

On helppo nähdä, että jokainen martingaali, jolla on D-polut on myös lokaali martingaali.

Määritellään seuraavaksi kaksi σ-algebraa, optionaalinen ja ennustettava σ-algebra, joukolla $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Tarkastellaan ensimmmäiseksi näistä laajempaa, optionaalista σ-algebraa.

Määritelmä II.15. Optionaalinen σ-algebra $\mathcal{O}$ joukolla $\Omega \times \mathbb{R}_+$ on kaikkien $\mathbb{F}$-sopivien D-polut omaavien prosessien generoima σ-algebra. Prosessia, joka on mitallinen optionaalisen σ-albegran suhteen, kutsutaan optionaaliseksi.

Lause II.16. *Olkoon X optionaalinen (vast. ennustettava) prosessi. Jos τ on pysätyshetki, niin*

i. prosessi $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ on $\mathcal{F}_\tau$-mitallinen ja

ii. pysäytetty prosessi X^τ on optionaalinen (vast. ennustettava).

Todistus. [37] Cor. 3.23, 3.24 □

Lause II.17. *Jos σ ja τ ovat pysäytyshetkiä ja prosessi X on $\mathcal{F}_\sigma$-mitallinen satunnaismuuttuja, niin seuraavat prosessit ovat optionaalisia: $XI_{[\sigma,\tau]}$, $XI_{[\sigma,\tau[}$, $XI_{]\sigma,\tau]}$ ja $XI_{]\sigma,\tau[}$.*

Todistus. [42] Prop. 1.23 □

Lause II.18. *Jokainen vasemmalta jatkuva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi on optionaalinen.*

Todistus. [42] Prop. 1.24 □

Seuraus II.19. *Jos $\mathbb{F}$-sopivalla prosessilla X on D-polut, niin prosessit X_- ja $\Delta X = X - X_-$ ovat optionaalisia.*

Lause II.20.

i. Stokastiset välit $[\tau, \infty[$, jossa τ on mikä tahansa pysäytyshetki, generoivat optionaalisen σ-algebran.

ii. Stokastiset välit $[0, \tau]$, jossa τ on mikä tahansa pysäytyshetki, generoivat optionaalisen σ-algebran.

Todistus. i. [37] Thm. 3.17, ii. [28] Lemma 6.5 $\square$

Määritelmä II.21. Ennustettava σ-algebra $\mathcal{P}$ tulokentällä $\Omega \times \mathbb{R}_+$ on pienin σ-algebra, jonka suhteen kaikki vasemmalta jatkuvat $\mathbb{F}$-sopivat prosessit ovat mitallisia. Stokastinen prosessi on ennustettava, jos se on $\mathcal{P}$-mitallinen.

Huomautus. $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$.

Lause II.22. *Ennustettavan σ-algebran generoi mikä tahansa seuraavista satunnaisten joukkojen kokoelmista.*

i. $A \times \{0\}$, jossa $A \in \mathcal{F}_0$, ja $[0, \tau]$, jossa τ on mikä tahansa pysäytyshetki.

ii. $A \times \{0\}$, jossa $A \in \mathcal{F}_0$, ja $A \times (s, t]$, jossa $s < t$ ja $A \in \mathcal{F}_s$.

Todistus. [42] Thm. 2.2 $\square$

Lause II.23. *Jos X on ennustettava prosessi ja τ on pysäytyshetki, niin*

i. prosessi $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ on $\mathcal{F}_{\tau-}$-mitallinen ja

ii. pysäytetty prosessi X^τ on ennustettava.

Todistus. [42] Prop. 2.4 $\square$

Seuraavat lauseet saadaan suoraan ennustettavien prosessien määritelmästä.

Lause II.24. *Jos σ ja τ ovat pysätyshetkiä ja prosessi X on $\mathcal{F}_\sigma$-mitallinen satunnaismuuttuja, niin prosessi $XI_{]\sigma,\tau]}$ on ennustettava.*

Lause II.25. *Jos $\mathbb{F}$-sopivalla prosessilla X on D-polut, niin prosessi X_- on ennustettava ja prosessin X ollessa lisäksi ennustettava myös prosessi ΔX on ennustettava.*

Määritelmä II.26. Ennustettava hetki on kuvaus $T : \Omega \to [0, \infty]$, jolla stokastinen väli $[0, T[$ on ennustettava.

Jos T on ennustettava hetki, jokainen väli $[T, \infty[$ kuuluu ennustettavaan σ-algebraan ja siten myös optionaaliseen σ-algebraan. Täten prosessi $X = I_{[T,\infty[}$ on $\mathbb{F}$-sopiva ja $\{T \le t\} = \{X_t = 1\} \in \mathcal{F}_t$, joten ennustettavat hetket ovat myös pysäytyshetkiä. Jos T sen sijaan on pysäytyshetki ja $t > 0$, niin $[0, T + t[= \cup_n [0, T + (n-1)t/n] \in \mathcal{P}$ ja $T + t$ on ennustettava hetki.

Lause II.27. *Jos T on ennustettava hetki ja joukko $A \in \mathcal{F}_{T-}$, niin T_A on ennustettava hetki.*

Todistus. [42] Prop. 2.10 $\square$

Lause II.28. *Olkoot σ ja τ pysäytyshetkiä ja X satunnaismuuttuja. Silloin seuraavat väittämät ovat voimassa.*

i. Jos τ on ennustettava hetki ja X on $\mathcal{F}_\sigma$-mitallinen, niin $XI_{]\sigma,\tau[}$ on ennustettava.

ii. Jos σ on ennustettava hetki ja X on $\mathcal{F}_{\sigma-}$-mitallinen, niin $XI_{[\sigma,\tau]}$ on ennustettava.

iii. Jos σ ja τ ovat molemmat ennustettavia hetkiä ja X on $\mathcal{F}_\sigma$-mitallinen, niin $XI_{[\sigma,\tau[}$ on ennustettava.

Todistus. [42] Prop. 2.12 □

Lause II.29. *Olkoon X $\mathbb{F}$-sopiva prosessi, jolla on D-polut. Silloin prosessi X on ennustettava, jos ja vain jos se täyttää seuraavat ehdot.*

i. On olemassa jono positiivisia ennustettavia hetkiä (T_n), joilla joukko $\{\Delta X \neq 0\} \subset \cup_n [T_n]$.

ii. Kaikilla ennustettavilla hetkillä T on voimassa $X_T I_{\{T<\infty\}} \in \mathcal{F}_{T-}$.

Todistus. [37] Thm. 3.33 □

Lause II.30. *Jos X ja Y ovat ennustettavia prosesseja, joilla on voimassa $X_T = Y_T$ melkein varmasti joukossa $\{T < \infty\}$ kaikilla ennustettavilla hetkillä T, niin prosessit X ja Y ovat erottamattomia.*

Todistus. [42] Prop. 2.18 □

Lause II.31. *Olkoon τ pysäytyshetki, $\tau(\omega) = \inf\{t \mid (\omega, t) \in A\}$, jossa joukko A on ennustettava. Jos on voimassa $[\tau] \subset A$, niin τ on ennustettava hetki.*

Todistus. [42] Prop. 2.13 □

Lisäksi ennustettaville hetkille on voimassa seuraava lause.

Lause II.32. *Jos T on ennustettava hetki, niin on olemassa kasvava jono pysäytyshetkiä (τ_n), joilla $\tau_n < T$ melkein varmasti joukossa $\{T > 0\}$ ja $\lim_n \tau_n = T$ melkein varmasti.*

Todistus. [22] □

Prosessien projektiot

Tässä osiossa määritellään ennustettava ja duaali ennustettava projektio.

Lause II.33. *Olkoon X $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mitallinen, arvonsa joukossa $[-\infty, \infty]$ saava prosessi. Silloin on olemassa arvonsa joukossa $[-\infty, \infty]$ saava prosessi, jota kutsutaan prosessin X ennustettavaksi projektioksi ja merkitään ${}^P X$. Sen määrittelevät yksikäsitteisesti erottamattomuuteen asti seuraavat kaksi ominaisuutta.*

i. Prosessi ${}^P X$ on ennustettava.

ii. Kaikilla ennustettavilla hetkillä T on voimassa $({}^P X)_T = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{T-}]$ joukossa $\{T < \infty\}$.

Lisäksi ennustettavalla projektiolla on seuraavat ominaisuudet. Jos τ on mikä tahansa pysäytyshetki, niin ${}^P(X^\tau) = ({}^P X)I_{[0,\tau]} + X_\tau I_{]\tau,\infty[}$. Ja jos ${}^P X$ saa vain äärellisiä arvoja ja Y on joukossa $[-\infty, \infty]$ arvonsa saava ennustettava prosessi, niin ${}^P(XY) = Y^P(X)$.

Todistus. [42] Thm. 2.28 □

Seuraus II.34. *Jos prosessi X on lokaali martingaali, niin ${}^P X = X_-$ ja ${}^P(\Delta X) = 0$.*

Määritelmä II.35. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Satunnaismuuttuja ξ on σ-integroituva σ-algebran $\mathcal{G}$ suhteen, jos on olemassa joukot $\Omega_n \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$ melkein varmasti, joilla jokainen satunnaismuuttuja ξI_{Ω_n} on integroituva.

Lause II.36. *Olkoon T ennustettava hetki, ξ satunnaismuuttuja ja prosessi $Z = \xi I_{[T]}$. Jos satunnaismuuttuja $\xi I_{\{T<\infty\}}$ on σ-integroituva σ-algebran $\mathcal{F}_{T-}$ suhteen, niin prosessin Z ennustettava projektio on olemassa ja*

$$ {}^P Z = \mathbb{E}[\xi I_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_{T-}]I_{[T]}. $$

Todistus. [37] Thm. 5.6 □

Myöhemmin tullaan tarvitsemaan ohuen joukon käsitettä. Ohuet joukot liittyvät olennaisesti prosessien hyppyihin.

Määritelmä II.37. Joukkoa A kutsutaan ohueksi, jos se on muotoa $A = \cup_n[\tau_n]$, jossa (τ_n) on jono pysäytyshetkiä. Jos lisäksi kaikilla $i \neq j$ pätee $[\tau_i] \cap [\tau_j] = \emptyset$, niin jonoa (τ_n) kutsutaan tyhjentäväksi jonoksi joukolle A.

Lemma II.38. *Millä tahansa ohuella joukolla on tyhjentävä jono pysäytyshetkiä.*

Todistus. [42] Lemma 1.31 □

Lause II.39. *Jos $\mathbb{F}$-sopivalla prosessilla X on D-polut, niin joukko $\{\Delta X \neq 0\}$ on ohut. Tämän joukon tyhjentävää jonoa kutsutaan jonoksi, joka tyhjentää prosessin X hypyt.*

Todistus. [42] Prop. 1.32 □

Lause II.40. *Olkoon joukko A ohut ja optionaalinen. Silloin myös joukko $\{{}^P(I_A) > 0\}$, joka on määritelty erottamattomuuteen asti, on ohut.*

Todistus. [42] Prop. 2.34 □

Ennen duaalin ennustettavan projektion tarkastelemista on tarpeellista määritellä uusia prosessien luokkia.

Määritelmä II.41. Olkoon f reaaliarvoinen funktio ja Δ jokin välin $[0,t]$ jako, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$. Määritellään summa $S_t^\Delta = \sum_i |f_{t_{i+1}} - f_{t_i}|$. Funktio f on äärellisesti heilahteleva välillä $[0,t]$, jos $S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta < \infty$, ja f on äärellisesti heilahteleva, jos se on äärellisesti heilahteleva kaikilla kompakteilla väleillä. Jos lisäksi $\lim_{t\to\infty} S_t < \infty$, niin funktiota f kutsutaan rajoitetusti heilahtelevaksi. Arvoa S_t kutsutaan funktion f variaatioksi välillä $[0,t]$.

Määritelmä II.42. Kaikkien reaaliarvoisten $\mathbb{F}$-sopivien prosessien A, joilla on D-polut, alkuarvonaan $A_0 = 0$ ja ei-vähenevät polut (vast. jokaisella äärellisellä välillä $[0,t]$ äärellisesti heilahtelevat polut), muodostamaa joukkoa merkitään $\mathcal{V}^+$ (vast. $\mathcal{V}$). Joukkoon $\mathcal{V}^+$ kuuluvia prosesseja kutsutaan $\mathbb{F}$-sopiviksi kasvaviksi prosesseiksi ja joukkoon $\mathcal{V}$ kuuluvia prosesseja $\mathbb{F}$-sopiviksi äärellisesti heilahteleviksi prosesseiksi. Äärellisesti heilahtelevan prosessin A variaatio on $var_t(A) = \int_0^t |dA_s|$.

Huomautus. Jos prosessi $A \in \mathcal{V}^+$, niin sillä on päätearvo $A_\infty \in [0,\infty]$ ja $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$, ja myös $var(A) = A$ kaikilla prosesseilla $A \in \mathcal{V}^+$.

Lause II.43. *Kaikilla prosesseilla $A \in \mathcal{V}$ on olemassa yksikäsitteinen pari $\mathbb{F}$-sopivia kasvavia prosesseja (B,C), joilla $A = B-C$ ja $var(A) = B+C$. Eli prosessi $var(A)$ on $\mathbb{F}$-sopiva kasvava prosessi ja $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \ominus \mathcal{V}^+$. Jos prosessi A on lisäksi ennustettava, niin prosessit B, C ja $var(A)$ ovat myös ennustettavia.*

Todistus. [42] Prop. 3.3 □

Määritelmä II.44. Joukon $\mathcal{A}^+$ muodostavat ne prosessit $A \in \mathcal{V}^+$, jotka ovat integroituvia, $\mathbb{E}(A_\infty) < \infty$, ja joukon $\mathcal{A}$ ne prosessit $A \in \mathcal{V}$, joilla on integroituva variaatio, $\mathbb{E}(var_\infty(A)) < \infty$. Prosesseja, jotka kuuluvat näistä muodostettuihin lokalisoituihin luokkiin $\mathcal{A}^+_{loc}$ ja $\mathcal{A}_{loc}$ kutsutaan lokaalisti integroituviksi $\mathbb{F}$-sopiviksi kasvaviksi prosesseiksi ja $\mathbb{F}$-sopiviksi prosesseiksi, joilla on lokaalisti integroituva variaatio.

Huomautus. Luokat $\mathcal{V}^+$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}^+$ ja $\mathcal{A}$ ovat vakaita pysätyksen suhteen ja lokalisoiduille luokille on voimassa

$$\mathcal{V}^+_{loc} = \mathcal{V}^+, \quad \mathcal{V}_{loc} = \mathcal{V} \quad ja$$

$$\mathcal{A}_{loc} = \mathcal{A}^+_{loc} \ominus \mathcal{A}^+_{loc}, \quad \mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}^+_{loc} \subset \mathcal{V}^+, \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{loc} \subset \mathcal{V}.$$

Lause II.45. *Olkoon $A \in \mathcal{V}$ (vast. $\mathcal{V}^+$)*

i. Olkoon H optionaalinen (vast. ei-negatiivinen) prosessi, jolla prosessi $B = H \cdot A$ on äärellinen. Silloin prosessi B kuuluu luokkaan $\mathcal{V}$ (vast. $\mathcal{V}^+$) ja $dB \ll dA$. Jos lisäksi prosessit A ja H ovat ennustettavia, myös prosessi B on ennustettava.

ii. Olkoon prosessi $B \in \mathcal{V}$ (vast. $\mathcal{V}^+$) ja $dB \ll dA$. Silloin on olemassa optionaalinen (vast. ei-negatiivinen) prosessi H, jolla on voimassa $B = H \cdot A$ erottamattomuuteen saakka. Jos prosessit A ja B ovat lisäksi ennustettavia, voidaan myös prosessi H valita ennustettavaksi.

Todistus. [42] Prop. 3.5, 3.13 □

Huomautus. Merkinnällä $H \cdot A$ tarkoitetaan tässä luvussa prosessin H Lebesguen ja Stieltjesin integraalia prosessin A suhteen.

Määritellään seuraavaksi avaruuteen $\mathcal{A}_{loc}$ kuuluville prosesseille duaali ennustettava projektio eli kompensaattori.

Lause II.46. *Olkoon $A \in \mathcal{A}_{loc}$. Silloin on olemassa erottamattomuuteen asti yksikäsitteinen ennustettava prosessi $A^P \in \mathcal{A}_{loc}$, jota kutsutaan prosessin A kompensaattoriksi tai duaaliksi ennustettavaksi projektioksi, jolla prosessi $A - A^P$ on lokaali martingaali. Lisäksi kaikilla sellaisilla ennustettavilla prosesseilla H, joilla $H \cdot A \in \mathcal{A}_{loc}$, on voimassa $H \cdot A^P \in \mathcal{A}_{loc}$, $H \cdot A^P = (H \cdot A)^P$ ja $H \cdot A - H \cdot A^P$ on lokaali martingaali.*

Todistus. [42] Thm. 3.18 □

Kompensaattorilla on seuraavia yksinkertaisia ominaisuuksia

Lause II.47.

i. Jos prosessi $A \in \mathcal{A}_{loc}$ on ennustettava, niin $A^P = A$.

ii. Jos prosessi $A \in \mathcal{A}_{loc}$ ja τ on pysäytyshetki, niin $(A^\tau)^P = (A^P)^\tau$.

iii. Jos prosessi $A \in \mathcal{A}_{loc}$, niin ${}^P(\Delta A) = \Delta(A^P)$.

iv. Jos prosessi $A \in \mathcal{A}_{loc}$, niin A on lokaali martingaali, jos ja vain jos $A^P = 0$.

v. Jos prosessi $A \in \mathcal{M}_{loc} \cap \mathcal{V}$ ja ennustettava prosessi H on sellainen, että $H \cdot A \in \mathcal{A}_{loc}$, niin prosessi $H \cdot A$ on lokaali martingaali.

Todistus. [42] Ch. I.3b □

Esimerkki II.48. *Olkoon N Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Tällöin prosessi $X_t = N_t - \lambda t$ on martingaali ja λt on ennustettava prosessi avaruudessa $\mathcal{A}_{loc}$, joten kompensaattoriksi saadaan $N_t^P = \lambda t$. Lasketaan seuraavaksi prosessin N ennustettava projektio, nyt ${}^P X_t = X_{t-} = N_{t-} - \lambda t = {}^P N_t - \lambda t$, josta saadaan ${}^P N = N_- \neq N^P$. Yleensä prosessin ennustettava projektio ja duaali ennustettava projektio eroavatkin toisistaan.*

Lokaalit martingaalit

Tarkastellaan seuraavaksi lokaaleja martingaaleja ja erityisesti neliöintegroituvia martingaaleja.

Lause II.49. *Jokainen prosessi, joka kuuluu avaruuteen $\mathcal{M}_{loc} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{P}$, ja 0 ovat erottamattomia.*

Todistus. [42] Cor. 3.16 □

Määritelmä II.50. Lokaalia martingaalia M kutsutaan täysin epäjatkuvaksi lokaaliksi martingaaliksi, jos $M_0 = 0$ ja M on ortogonaalinen kaikkien jatkuvien lokaalien martingaalien kanssa.

On syytä huomata, että täysin epäjatkuvat lokaalit martingaalit M eivät yleensä ole hyppyjensä summia. Pääasiallisesti summa $\sum_{s\leq t} \Delta M_s$ ei suppene, supetessaankin se yleensä poikkeaa prosessista M. Esimerkiksi Poisson-prosessille N on voimassa $N_t = \sum_{s\leq t} \Delta N_s$, toisaalta prosessi $M_t = N_t - \lambda t$ on täysin epäjatkuva martingaali ja $\sum_{s\leq t} \Delta M_s = \sum_{s\leq t} \Delta N_s \neq M_t$.

Lause II.51. *Jos lokaali martingaali M on sekä jatkuva että täysin epäjatkuva, niin $M = 0$ melkein varmasti.*

Todistus. [37] Lemma 7.22 □

Lause II.52. *Kaikilla lokaaleilla martingaaleilla M on olemassa erottamattomuuteen asti yksikäsitteinen hajotelma*

$$M = M_0 + M^c + M^d,$$

jossa $M_0^c = M_0^d = 0$, prosessi M^c on jatkuva lokaali martingaali ja prosessi M^d on täysin epäjatkuva lokaali martingaali.

Todistus. [37] Thm. 7.25 □

Seuraus II.53. *Jos prosessit M ja N ovat molemmat täysin epäjatkuvia lokaaleja martingaaleja, joilla on erottamattomat hypyt $\Delta M = \Delta N$. Silloin prosessit M ja N ovat erottamattomat.*

Lause II.54. *Olkoon M lokaali martingaali. Tällöin kaikilla $t \geq 0$ on voimassa*

$$\sum_{s\leq t} (\Delta M_s)^2 < \infty \quad m.v..$$

Todistus. [37] Lemma 7.27 □

Lause II.55. *Jokaista paria (M, N) lokaaleja neliöintegroituvia martingaaleja kohti on olemassa erottamattomuuten asti yksikäsitteinen ennustettava prosessi $\langle M, N\rangle \in \mathcal{V}$, jolla prosessi $MN - \langle M, N\rangle$ on lokaali martingaali.*

Todistus. [37] Lemma 7.28 □

Myös avaruuden $\mathcal{M}_{loc}$ alkioiden välillä voidaan määritellä ortogonaalisuus.

Määritelmä II.56. Martingaalit $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$ ovat ortogonaalisia, jos MN on lokaali martingaali ja $M_0N_0 = 0$ melkein varmasti, merkitään $M \perp N$.

Lokaaleille martingaaleille pätevät kuuluisat Burkholderin, Davisin ja Gundyn epäyhtälöt.

Lause II.57. *Olkoon $q \in [1, \infty[$ ja prosessi $M \in \mathcal{M}_{loc}$. Silloin on olemassa vakiot c_q ja C_q, joilla on voimassa*

$$c_q \|M^*_\infty\|_q \leq \|[M]^{1/2}_\infty\|_q \leq C_q \|M^*_\infty.$$

Todistus. [40] □

Siirrytään neliöintegroituviin martingaaleihin.

Määritelmä II.58. Martingaali $M \in \mathcal{M}$ on neliöintegroituva martingaali, jos $sup_t \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$. Kaikkien neliöintegroituvien martingaalien joukkoa merkitään $\mathcal{M}^2$ ja lokaalien neliöintegroituvien martingaalien joukkoa $\mathcal{M}^2_{loc}$.

Martingaalien konvergenssilauseen perusteella kaikille $M \in \mathcal{M}^2$ on olemassa raja-arvo $\lim_t M_t = M_\infty$, missä suppeneminen on sekä melkein varmaa että $\mathbb{L}^2$-suppenemista, ja $M_\infty \in \mathcal{F}_\infty$.

Lemma II.59. *Olkoon $M \in \mathcal{M}$. Silloin $M \in \mathcal{M}^2$, jos ja vain jos $\mathbb{E}(M^2_\infty) < \infty$. Tällöin on voimassa*

$$\mathbb{E}(M^2_\infty) = \sup_t \mathbb{E}(M_t^2). \tag{II.6}$$

Lause II.60. *Määritellään (lokaalisti) neliöintegroituvien martingaalien M ja N olevan ekvivalentteja, $M \sim N$, jos ne ovat erottamattomia. Näin saatavien ekvivalenssiluokkien,*

$$\{M\} := \Big\{ N \in \mathcal{M}^2 \mid N \sim M,\ M \in \mathcal{M}^2 \Big\},$$

muodostama avaruus varustettuna sisätulolla,

$$(\{M\}, \{N\}) := \mathbb{E}(M_\infty N_\infty), \tag{II.7}$$

ja vastaavalla normilla,

$$||\{M\}||_{\mathcal{M}^2} := (\{M\}, \{M\})^{\frac{1}{2}} = ||M_\infty||_2, \tag{II.8}$$

missä $||\cdot||_2$ on avaruuden $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ normi, on Hilbertin avaruus, joka on isomorfinen avaruuden $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ kanssa kuvauksella $M \mapsto M_\infty$. Myös tästä avaruudesta käytetään merkintää $\mathcal{M}^2$ ($\mathcal{M}^2_{loc}$).

Tästä lähtien samaistamme merkinnät $\{M\}$ ja M.

Avaruudessa $\mathcal{M}^2$ on kaksi vaihtoehtoista tapaa määritellä ortogonaalisuus, edellä määritelty martingaaliteoreettinen ortogonaalisuus ja Hilbertin avaruuden ortogonaalisuus. Näistä ensimmäinen on voimakkaampaa ortogonaalisuutta kuin jälkimmäinen: olkoon $X, Y \in \mathcal{M}^2$ ja $X \perp Y$, silloin $\mathbb{E}(X_\infty Y_\infty) = \mathbb{E}(X_0 Y_0) = 0$. Kun on tarpeellista tehdä ero näiden kesken, kutsutaan Hilbertin avaruuden ortogonaalisuutta heikoksi ortogonaalisuudeksi. Joukon $U \subset \mathcal{M}^2$ Hilbertin avaruuden ortogonaalista komplementtia merkitään yhä tavalliseen tapaan $U^\perp$.

Määritelmä II.61. Semimartingaali on prosessi X, joka on muotoa $X = X_0 + M + A$, jossa X_0 on äärellinen $\mathcal{F}_0$-mitallinen satunnaismuuttuja, prosessi M on lokaali martingaali, $M_0 = 0$, ja prosessi A on äärellisesti heilahteleva. Merkitään kaikkien semimartingaalien avaruutta $\mathcal{S}$.

Tämä on klassinen määritelmä semimartingaaleille. Tätä stokastisten prosessien luokkaa voidaan lähteä tarkastelemaan myös hieman toiselta kannalta (ks. Protter [60]), joka johtaa stokastisten integraalien teoriaan hieman nopeammin.

Määritelmä II.62. Semimartingaalia X kutsutaan erityiseksi semimartingaaliksi, jos sillä on olemassa erottamattomuuteen asti yksikäsitteinen hajotelma $X = X_0 + M + A$, jossa prosessi $A \in \mathcal{V}$ on ennustettava. Tätä hajotelmaa kutsutaan erityisen semimartingaalin X kanoniseksi hajotelmaksi. Erityisten semimartingaalien muodostamaa avaruutta merkitään $\mathcal{S}_p$.

Edeltävän hajotelman yksikäsitteisyys seuraa lauseesta (II.49). Selvästi on voimassa $\mathcal{M}_{loc} \subset \mathcal{S}_p$ sekä $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$, ja kaikki semimartingaalit ovat $\mathcal{F}$-sopivia ja niillä on D-polut.

Lause II.63.

i. *Avaruudet $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{S}_p$ ovat vakaita pysäytyksen suhteen.*

ii. *On voimassa $\mathcal{S}_{loc} = \mathcal{S}$ ja $(\mathcal{S}_p)_{loc} = \mathcal{S}_p$.*

iii. *Jotta prosessi X kuuluisi avaruuteen $\mathcal{S}$, on riittävää, että on olemassa lokalisoiva jono pysäytyshetkiä (τ_n) ja jono (Y_n) semimartingaaleja, joilla $X = Y_n$ pätee kaikilla väleillä $[0, \tau_n[$.*

Todistus. [42] Prop. 4.25 □

Lauseiden (II.52) ja (II.51) perusteella saadaan seuraava tulos.

Lause II.64. *Jos prosessi X on semimartingaali, niin on olemassa erottamattomuuteen asti yksikäsitteinen jatkuva lokaali martingaali X^c, $X_0^c = 0$, jolla on voimassa millä tahansa hajotelmalla $X = X_0 + M + A$, $M^c = X^c$. Prosessia X^c kutsutaan semimartingaalin X jatkuvaksi martingaaliosaksi.*

Annetaan vielä lause, joka määrittelee kaikki deterministiset prosessit, jotka ovat myös semimartingaaleja.

Lause II.65. *Olkoon f reaaliarvoinen funktio joukolla $\mathbb{R}_+$. Silloin prosessi $X_t(\omega) = f(t)$ on semimartingaali, jos ja vain jos funktiolla f on D-polut ja se on äärellisesti heilahteleva kaikilla äärellisillä väleillä.*

Todistus. [42] Prop. 4.28 □

Määritelmä II.66. Olkoot X ja Y kaksi semimartingaalia. Määritellään $\mathcal{F}$-sopiva äärellisesti heilahteleva prosessi $[X,Y]$ seuraavasti

$$[X,Y]_t = X_0Y_0 + \langle X^c, Y^c\rangle_T + \sum_{s\le t}(\Delta X_s \Delta Y_s), \quad t \ge 0.$$

Prosessia $[X,X]$ merkitään myös $[X]$ ja $[X,Y] = \frac{1}{4}([X+Y] - [X-Y])$.

Huomautus. Lauseen (II.54) mukaan kaikilla semimartingaaleilla X ja ajanhetkillä $t > 0$ on voimassa

$$\sum_{s\le t}(\Delta X_s)^2 < \infty \quad m.v..$$

Määritelmä II.67. Jos prosessi $[X,Y]$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{A}_{loc}$, sen duaalia ennustettavaa projektiota merkitään $\langle X,Y\rangle$. Tällöin sanotaan, että prosessi $\langle X,Y\rangle$ on olemassa.

Kootaan seuraavaksi prosessin [,] ominaisuuksia.

Lause II.68.

i. *Olkoot prosessit X ja Y semimartingaaleja ja olkoon $\tau = (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono pysätyshetkiä, joilla $T_0 = 0$, $\sup_n T_n < \infty$ ja $T_n < T_{n+1}$ joukossa $\{T_n < \infty\}$, sekä $(\tau_n = (T(n,m))_{m\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ jono tällaisia pysäytyshetkien jonoja, joilla on voimassa $\sup_m [T(n,m+1)\wedge t - T(n,m)\wedge t] \to 0$ kaikilla ajanhetkillä $t \in \mathbb{R}_+$. Silloin prosessi*

$$S_{\tau_n}(X,Y)_t = \sum_{x\ge 1}(X_{T(n,m+1)\wedge t} - X_{T(n,m)\wedge t})(Y_{T(n,m+1)\wedge t} - Y_{T(n,m)\ \wedge t})$$

suppenee melkein varmasti kohti prosessia $[X,Y]$ kaikilla kompakteilla väleillä.

ii. *Jos prosessit X ja Y ovat semimartingaaleja, niin $[X,Y] \in \mathcal{V}$ ja $[X,X] \in \mathcal{V}^+$.*

iii. *Jos prosessit X ja Y ovat semimartingaaleja, niin $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$.*

iv. *Jos prosessi $Y \in \mathcal{V}$ on ennustettava ja prosessi X on lokaali martingaali, niin $[X,Y]$ on lokaali martingaali.*

v. *Jos toinen prosesseista $X \in \mathcal{S}$ ja $Y \in \mathcal{V}$ on jatkuva, niin $[X,Y] = 0$*

   Seuraavissa kohdissa prosessit X ja Y ovat lokaali martingaaleja, jollei muuta mainita.

vi. *Prosessi $XY - X_0Y_0 - [X,Y]$ on lokaali martingaali.*

vii. *Jos X ja Y ovat lokaalisti neliöintegroituvia martingaaleja, niin prosessi $[X,Y] \in \mathcal{A}_{loc}$ ja sen kompensaattori on $\langle X,Y\rangle$. Jos lisäksi prosessit X ja Y ovat neliöintegroituvia martingaaleja, niin $XY - [X,Y] \in \mathcal{M}$.*

viii. *Prosessi X on neliöintegroituva martingaali (vast. lokaalisti neliöintegroituva martingaali, jos ja vain jos $[X] \in \mathcal{A}$ (vast. $\mathcal{A}_{loc}$) ja X_0 on neliöintegroituva.*

ix. *$X = X_0$ melkein varmasti, jos ja vain jos $[X] = 0$.*

x. *Prosessi $[X]^{1/2}$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{A}_{loc}$.*

xi. *Prosessi $[X,Y] = 0$, aina kun X on jatkuva ja Y on täysin epäjatkuva.*

xii. *$[X,Y] = \langle X,Y \rangle = 0$, kun prosessit X ja Y ovat sekä jatkuvia että ortogonaalisia.*

xiii. *Jos X on täysin epäjatkuva, niin $[X]_t = \sum_{s \le t} (\Delta X_s)^2$.*

Todistus. [42] Ch. I.4e □

Semimartingaaleille on myös voimassa Kunitan ja Watanaben epäyhtälö.

Lause II.69. *Olkoot prosessit X ja Y semimartingaaleja, H ja K mitallisia prosesseja ja p ja q Hölderin liittolukuja. Tällöin on voimassa*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |H_s||K_s||d[X,Y]_s| \right) \le \left\| \left(\int_0^\infty H_s^2 d[X]_s \right)^{1/2} \right\|_p \left\| \left(\int_0^\infty K_s^2 d[Y]_s \right)^{1/2} \right\|_q .$$

Todistus. [60] II.6 Thm. 25 □

Määritellään semimartingaaleille vielä avaruus $\mathcal{H}^p$.

Määritelmä II.70. Olkoon $p \in [1, \infty)$ ja prosessi X erityinen semimartingaali, jolla on kanoninen hajotelma $X = X_0 + M + A$. Määritellään

$$|||X|||_p = \|X_0\|_p + \left\| [M]_\infty^{1/2} \right\|_p + \left\| \int_0^\infty |dA_s| \right\|_p$$

ja

$$\mathcal{H}^p = \{X : |||X|||_p < \infty\}.$$

Kutsutaan avaruuden $\mathcal{H}^p$ suljettua aliavaruutta $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}^p$ martingaalien Hardyn avaruudeksi $\mathcal{H}^p$.

Huomautus. Kun prosessi M on lokaali martingaali, niin normit $\|M_\infty^*\|_p$, $\|M_\infty\|_p$ ja $|||M|||_p$ ovat ekvivalentteja Burkholderin, Davisin ja Gundyn ja Doobin epäyhtälöiden perusteella. Erityisesti huomataan, että kaikki prosessit $M \in \mathcal{H}^1$ ovat tasaisesti integroituvia ja aina on olemassa raja-arvo $M_\infty = \lim_{t \to \infty} M_t$.

III. STOKASTINEN INTEGROINTI

Stokastisen integroinnin määrittelivät ensimmäisinä Paley, Wiener ja Zygmund [57] deterministisille integroitaville Brownin liikkeen suhteen ja nykyisessä muodossaan K. Itô [38], [39] tavoitellessaan täsmällistä käsittelyä A.N. Kolmogorovin esittelemille diffuusioprosessien stokastisille differentiaaliyhtälöille [46]. Tätä käsitettä yleistivät seuraavaksi P. Courrège [16] sekä H. Kunita ja S. Watanabe [48], määritellen stokastisen integroinnin neliöintegroituvien martingaalien suhteen, jonka jälkeen stokastinen integrointi yleistettiin koskemaan integrointia jatkuvien semimartingaalien suhteen C. Doléns-Daden ja P.-A. Meyerin toimesta [26] ja lokaalisti rajoitetuille integroitaville sellaisten semimartingaalien suhteen, joiden ei enää vaadittu olevan jatkuvia [52].

J. Jacod [40] konstruoi stokastisen integraalin semimartingaalien suhteen rajoittamattomille integroitaville, jotka täyttävät tietyt integroituvuusehdot. Nämä ehdot määrittelevät tietyssä mielessä yleisimmän mahdollisen integroitavien luokan stokastiselle integroinnille. Menetelmä, jota J. Jacod käytti konstruktiossaan, perustui semimartingaalin epäjatkuvuuskohtien karakterisoinnille. C.S. Chou, P.-A. Meyer ja C. Stricker [13] taasen käyttivät toisenlaista lähestymistapaa päätyäkseen ekvivalenttiin määritelmään stokastiselle integraalille.

Jo mainitut työt tarkastelivat stokastista integrointia yksiulotteisen semimartingaalin X suhteen. Yleistys moniulotteisille semimartingaaleille $X = (X^1, \cdots, X^d) \in \mathbb{R}^d$ voidaan tehdä yksinkertaisella tavalla: integroitaviksi prosesseiksi valitaan prosessit $H = (H^1, \cdots, H^d)$, jossa H^i on integroituva satunnaismuuttujan X^i suhteen kaikilla $i = 1, \cdots, d$, ja stokastinen integraali määritellään yksiulotteisten stokastisten integraalien summana $\Sigma_{i=1}^d H^i \cdot X^i$. Kutsutaan tällä tavoin määriteltyä integraalia komponenteittaiseksi stokastiseksi integraaliksi[1].

Valitettavasti näin määritelty stokastinen integraali moniulotteisessa tapauksessa ei ollut riittävä kaikille stokastisen analyysin tarpeille. Tämän huomasi L. Galtchouk [34], joka osoitti ettei tällä tavoin määriteltyjen stokastisten integraalien avaruus ole välttämättä suljettu semimartingaalitopologiassa. Myöskin rahoitusteoriassa on osoittautunut tarvetta laajemmalle integraalille moniulotteisille prosesseille [9], [10], [64].

Stokastinen integrointi voidaan yleistää moniulotteiseen tapaukseen myös niin, että stokastisten integraalien avaruus on suljettu [41], [53]. J. Jacod [41] konstruoi tämän stokastisen vektori-integraalin[2] implisiittisessä muo-

[1] componentwise stochastic integral
[2] vector stochastic integral

dossa, aiempien konstruktioiden perustuessa jollekin isometriaominaisuudelle. Eksplisiittistä lähestymistapaa ehdotti ensimmäisenä A.N. Shiryaev [63] ja esitti myöhemmin stokastisen vektori-integraalin konstruktion yhdessä A.S. Chernyn kanssa [64].

Tämä esitys tulee seuraamaan A.N. Shiryaevin ja A.S. Chernyn [64] kulkemaa tietä stokastisen vektori-integraalin konstruoimisessa. Yksiulotteista stokastista integraalia ei tarkastella erikseen, se saadaan erikoistapauksena moniulotteisesta integraalista.

Stokastisen integraalin konstruktio

Lokaalit martingaalit

Olkoon $M \in \mathcal{M}^d_{loc}(\mathbb{P})$. Tällöin on olemassa $C \in \mathcal{V}^+$ ja epänegatiiviset optionaaliset prosessit π^{ij}, $i, j = 1, \cdots, d$, joille on voimassa kaikilla $t \geq 0$

$$[M^i, M^j]_t = \int_0^t \pi^{ij}_s dC_s \quad m.v. \tag{III.1}$$

(ks. [37] Thm. 5.14). Prosessi (π^{ij}) voidaan valita symmetriseksi $\pi^{ij}_t(\omega) = \pi^{ji}_t(\omega)$ kaikilla i, j, ω, t.

Valitaan avaruudesta $\mathbb{R}^d$ tiheä osajoukko $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ja tarkastellaan joukkoja

$$D_k = \left\{(\omega, t) : \sum_{i,j=1}^{d} \lambda^i_k \pi^{ij}_t(\omega) \lambda^j_k \geq 0\right\},$$

$$D = \left\{(\omega, t) : \forall \lambda \in \mathbb{R}^d, \sum_{i,j=1}^{d} \lambda^i \pi^{ij}_t(\omega) \lambda^j \geq 0\right\}$$

Jokainen joukko D_k on optionaalinen ja sen seurauksena myös $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$, joten prosessit $\tilde{\pi}^{ij} = \pi^{ij} I_D$ ovat optionaalisia. Tarkastellaan yhtälöä

$$0 \leq [\langle \lambda_k, M \rangle, \langle \lambda_k, M \rangle]_t = \int_0^t \left(\sum_{i,j=1}^{d} \lambda^i_k \pi^{ij}_k \lambda^j_k\right) dC_s = \int_o^t \sigma^k_s dC_s \quad m.v.,$$

jossa optionaaliset prosessit σ^k ovat epänegatiivisia ja $\langle \lambda_k, M \rangle$ on tavallinen sisätulo avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Edelleen saadaan

$$\int_0^t \left(\left(\sum_{i,j=1}^{d} \lambda^i_k \pi^{ij}_k I_{D_k} \lambda^j_k \right) - \sigma^k_s \right) dC_s = 0 \quad m.v.,$$

josta seuraavat yhtälöt

$$\int_0^t \pi^{ij}_s dC_s = \int_0^t \pi^{ij} I_{D_k} dC_s \quad m.v. \, \forall i, j, k \quad ja$$

$$\int_0^t \pi^{ij}_s dC_s = \int_0^t \pi^{ij} I_D dC_s \quad m.v. \, \forall i, j.$$

Tästä seuraa, että yhtälö (III.1) on voimassa myös, jos π^{ij} korvataan prosessilla $\tilde{\pi}^{ij}$. Joten yhtälössä (III.1) voidaan prosessi π^{ij} aina valita sellaiseksi, että matriisi $(\pi_t^{ij}(\omega))$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Jatkossa prosessista π^{ij} tullaan aina valitsemaan sellainen versio, jolla nämä ehdot täyttyvät. Lisäksi havaitaan, että millä tahansa $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $\omega \in \Omega$ ja $t \geq 0$ on voimassa seuraava epäyhtälö

$$\sum_{i,j=1}^{d} \lambda^i \pi_t^{ij} \lambda^j = \langle \pi_t(\omega)\lambda, \lambda \rangle \leq \|\lambda\|^2 \operatorname{tr} \pi_t(\omega) = \|\lambda\|^2 \sum_{i=1}^{d} \pi_t^{ii}(\omega). \quad \text{(III.2)}$$

Määritelmä III.1. Olkoon

$$\hat{L}^1(M) = \left\{ H : H \textit{ on ennustettava ja } \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \Big(\sum_{i,j=1}^{d} H_s^i \pi_s^{ij} H_s^j \Big) dC_s \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Määritellään avaruus $L^1(M)$ avaruuden $\hat{L}^1(M)$ ekvivalenssiluokkien muodostamaksi avaruudeksi, ekvivalenssirelaation ollessa seuraava:

$$H \sim K \Leftrightarrow \int_0^\infty \Big(\sum_{i,j=1}^{d} (H_s^i - K_s^i) \pi_s^{ij} (H_s^j - K_s^j) dC_s = 0 \quad m.v.$$

ja normiksi avaruudessa $L^1(M)$

$$\|H\|_{L^1(M)} = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \Big(\sum_{i,j=1}^{d} H_s^i \pi_s^{ij} H_s^j \Big) dC_s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avaruus $L^1(M)$ on tällä normilla varustettuna Banachin avaruus.

Määritelmä III.2. Porrasfunktio H on seuraavaa muotoa

$$H_t(\omega) = h_0(\omega) I_{t=0} + \sum_{k=1}^{m} h_k(\omega) I_{\tau_k(\omega) < t \leq \tau_{k+1}(\omega)},$$

jossa $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_{m+1}$ ovat pysäytyshetkiä ja jokainen h_k on rajoitettu d-ulotteinen $\mathcal{F}_{\tau_k}$-mitallinen satunnaismuuttuja.

Lemma III.3. *Avaruuteen $L^1(M)$ sisältyvien porrasfunktioiden joukko on tiheä avaruudessa $L^1(M)$.*

Todistus. Koska $[M^i]^{1/2} \in \mathcal{A}_{loc}$ kaikilla $i = 1, \cdots, d$, on olemassa kasvava jono pysäytyshetkiä (τ_n), $\tau_n \to \infty$ melkein varmasti, joilla

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_n} \pi_s^{ii} dC_s \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad m.v., \quad i = 1, \cdots, d, \; n \in \mathbb{N}.$$

Koska toisaalta prosesseille $H \in L^1(M)$ pätee, jos $(H_n)_t = H_t I_{\{t \leq \tau_n\}}$, niin $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1(M)} H$, saadaan

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \pi_s^{ii} dC_s \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad m.v., \quad i = 1, \cdots, d.$$

Olkoon nyt $\lambda \in \mathbb{R}^d$ kiinteä. Edeltävän seurauksena mikä tahansa prosessi λI_D kuuluu avaruuten $L^1(M)$, missä $D \in \mathcal{P}$.

Olkoon $\mathfrak{M}$ seuraavanlainen joukko

$$\mathfrak{M} = \{D \in \mathcal{P} : \lambda I_D \in L^1(M) \, approksimoitavissa \, porrasfunktioilla\}.$$

Havaitaan, että $\mathfrak{M}$ on monotoninen luokka, joka sisältää kaikki muotoa $A \times \{0\}$ olevat joukot, jossa $A \in \mathcal{F}_0$, ja kaikki muotoa $F \times (s,t]$ olevat joukot, jossa $F \in \mathcal{F}_s$. Koska nämä joukot generoivat σ-algebran $\mathcal{P}$ ja $\mathfrak{M}$ on monotoninen luokka, saadaan $\mathfrak{M} = \mathcal{P}$.

Mitä tahansa rajoitettua ennustettavaa prosessia H voidaan approksimoida tasaisesti äärellisillä, muotoa $\Sigma_k \lambda_k I_{D_k}$ olevilla, summilla, jossa $D_k \in \mathcal{P}$. Joten mitä tahansa rajoitettua ennustettavaa prossessia H voidaan approksimoida porrasfunktioilla avaruudessa $L^1(M)$.

Olkoon nyt H mielivaltainen avaruuden $L^1(M)$ alkio, jolloin on voimassa

$$H_n = H I_{\{\|H\| \leq n\}} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1(M)} H.$$

Tällöin edeltävän perusteella prosessia H voidaan approksimoida porrasfunktioilla avaruudessa $L^1(M)$. $\square$

Määritellään porrasfunktiolle

$$H_t(\omega) = h_0(\omega) I_{t=0} + \sum_{k=1}^{m} h_k(\omega) I_{\tau_k(\omega) < t \leq \tau_{k+1}(\omega)},$$

stokastinen integraali $H \cdot M$ seuraavasti

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} h_k^i (M^i_{t\wedge\tau_{k+1}} - M^i_{t\wedge\tau_k}).$$

Havaitaan, että porrasfunktiolle H stokastinen integraali on lokaali martingaali $H \cdot M \in \mathcal{M}_{loc}$ ja

$$[H \cdot M]_t = \int_0^t \Big(\sum_{i,j=1}^{d} H_s^i \pi_s^{ij} H_s^j \Big) dC_s. \tag{III.3}$$

Jos $H \in L^1(M)$, niin on olemassa jono porrasfunktioita (H_n), joka suppenee kohti prosessia H avaruudessa $L^1(M)$. Burkholderin, Davisin ja Gundyn epäyhtälöiden avulla saadaan

$$c_1 \mathbb{E}[H_n \cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}(H_n \cdot M)^*_\infty \leq C_1 \mathbb{E}[H_n \cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}} \quad ja$$

$$c_2 \mathbb{E}[H_m \cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}(H_m \cdot M)^*_\infty \leq C_2 \mathbb{E}[H_m \cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Valitaan $d = c_1 \wedge c_2$ ja $D = C_1 \vee C_2$, jolloin yhtälöstä (III.3) seuraa

$$d(\mathbb{E}[H_n \cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}} - \mathbb{E}[H_m \cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}}) \leq \mathbb{E}((H_n \cdot M) - (H_m \cdot M))^*_\infty$$

$$\leq D(\mathbb{E}[H_n\cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}}-\mathbb{E}[H_m\cdot M]_\infty^{\frac{1}{2}})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d(\|H_n\|_{L^1(M)}-\|H_m\|_{L^1(M)})\leq \|(H_n\cdot M)-(H_m\cdot M)\|_{\mathcal{H}^1}\leq D(\|H_n\|_{L^1(M)}-\|H_m\|_{L^1(M)}).$$

Joten rajankäynnistä seuraa, että $(H_n\cdot M)$ on Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{H}^1$ ja sillä on olemassa raja-arvo tässä avaruudessa.

Määritelmä III.4. Olkoon $H\in L^1(M)$ ja (H_n) jono porrasfunktioita, joka suppenee kohti prosessia H avaruudessa $L^1(M)$. Tällöin stokastinen vektori-integraali $H\cdot M$ määritellään jonon $(H_n\cdot M)$ raja-arvona avaruudessa $\mathcal{H}^1$.

Stokastinen vektori-integraali voidaan määritellä myös avaruutta $L^1(M)$ laajemmalle luokalle integroitavia prosesseja.

Määritelmä III.5. Määritellään avaruus

$$L^1_{loc}(M)=\left\{H: H\ on\ ennustettava\ ja\ \mathbb{E}\left(\int_0^\infty\Big(\sum_{i,j=1}^d H_s^i\pi_s^{ij}H_s^j\Big)dC_s\right)^{\frac{1}{2}}\in\mathcal{A}_{loc}\right\},$$

jossa prosessit π^{ij} ja C toteuttavat yhtälön (III.1).

Olkoon $H\in L^1_{loc}$, jolloin on olemassa kasvava jono pysäytyshetkiä (τ_n), $\tau_n\to\infty$ melkein varmasti ja

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_n}\Big(\sum_{i,j=1}^d H_s^i\pi_s^{ij}H_s^j\Big)dC_s\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

sekä $HI_{[0,\tau_n]}\in L^1(M)$. Edelleen on voimassa

$$\big((HI_{[0,\tau_{n+1}]}\cdot M)\big)^{\tau_n}=\big(HI_{[0,\tau_n]}\big)\cdot M,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Havaitaan, että on olemassa yksikäsitteinen prosessi $H\cdot M$, jolla on ominaisuus

$$\big(H\cdot M\big)^{\tau_n}=\big(HI_{[0,\tau_n]}\big)\cdot M,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{III.4}$$

Lisäksi havaitaan, että prosessi $H\cdot M$ ei riipu lokalisoivasta pysäytyshetkijonosta (τ_n).

Määritelmä III.6. Olkoon $H\in L^1_{loc}(M)$, yhtälön (III.4) toteuttava prosessi $H\cdot M$ on prosessin H stokastinen vektori-integraali prosessin M suhteen.

Huomautus. Tietyssä mielessä $L^1_{loc}(M)$ on suurin ennustettavien prosessien luokka, jolle stokastinen vektori-integraali on lokaali martingaali. Jokaiselta "mielekkäästi"määritellyltä stokastiselta integraalilta voidaan edellyttää ominaisuutta

$$[H\cdot M]_t=\int_0^t\Big(\sum_{i,j=1}^d H_s^i\pi_s^{ij}H_s^j\Big)dC_s$$

ja jos $H\cdot M\in\mathcal{M}_{loc}$, niin $[H\cdot M]^{\frac{1}{2}}\in\mathcal{A}_{loc}$.

Nyt määritellyllä stokastisella vektori-integraalilla on seuraavia ominaisuuksia.

Lemma III.7. *Olkoon $M, M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{loc}^d$, silloin stokastisella vektoriinte graalilla on seuraavat ominaisuudet:*

i. jos $H_1, H_2 \in L_{loc}^1(M)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, niin $\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 \in L_{loc}^1(M)$ ja

$$(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) \cdot M = \alpha_1 (H_1 \cdot M) + \alpha_2 (H_2 \cdot M),$$

ii. jos $H \in L_{loc}^1(M)$, niin $H \cdot M \in \mathcal{M}_{loc}$ ja

$$[H \cdot M]_t = \int_0^t \Big(\sum_{i,j=1}^d H_s^i \pi_s^{ij} H_s^j \Big) dC_s,$$

jossa π^{ij} ja C toteuttavat yhtälön (III.1),

iii. jos $H \in L_{loc}^1(M)$ ja $D \in \mathcal{P}$, niin

$$I_D \cdot (H \cdot M) = (H I_D) \cdot M,$$

iv. jos $H \in L_{loc}^1(M)$ ja τ on pysäytyshetki, niin

$$(H \cdot M)^\tau = (H \cdot M^\tau) = (H I_{[0,\tau]}) \cdot M,$$

v. jos $H \in L_{loc}^1(M)$, niin

$$\Delta (H \cdot M) = \langle H, \Delta M \rangle,$$

vi. jos $H \in L_{loc}^1(M)$ ja $H_n = H I_{\|H\| \le n}$, niin

$$H_n \cdot M \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{H}^1} H \cdot M \quad ja$$

vii. jos $H \in L_{loc}^1(M_1) \cap L_{loc}^1(M_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, niin $H \in L_{loc}^1(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2)$,

$$H \cdot (\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) = \alpha_1 (H \cdot M_1) + \alpha_2 (H \cdot M_2). \tag{III.5}$$

Todistus. [64] Lemma 3.5, Lemma 3.6 □

Äärellisesti heilahtelevat prosessit

Olkoon $A \in \mathcal{V}^d$. Silloin on olemassa optionaaliset prosessit a^i, $i = 1, \cdots, d$ ja prosessi $C \in \mathcal{V}^+$, joilla on voimassa kaikilla $t \geq 0$

$$A_t^i = \int_0^t a_s^i dC_s \quad m.v. \tag{III.6}$$

Määritelmä III.8. Olkoon avaruus

$$L_{var}(A) = \left\{ H : H \ ennustettava \ ja \ \int_0^t |\sum_{i=1}^d H_s^i a_s^i| dC_s < \infty \quad m.v. \ \forall t \geq 0 \right\}.$$

Määritelmä III.9. Stokastinen vektori-integraali prosessin $H \in L_{var}(A)$ suhteen on Lebesguen ja Stieltjesin integraali

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t \Big(\sum_{i=1}^d H_s^i a_s^i \Big) dC_s.$$

Myös tälle integraalille on voimassa vastaanvanalaisia ominaisuuksia, kuin aikaisemmin määritellylle stokastiselle vektori-integraalille lokaalien martingaalien suhteen.

Lemma III.10. *Jos $A \in \mathcal{V}^d$, niin stokastisella vektori-integraalilla prosessin A suhteen on seuraavat ominaisuudet:*

i. jos $H_1, H_2 \in L_{var}(A), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, niin $\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 \in L_{var}(A)$ ja

$$(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) \cdot A = \alpha_1 (H_1 \cdot A) + \alpha_2 (H_2 \cdot A),$$

ii. jos $H \in L_{var}(A_1) \cap L_{var}(A_2), \alpha_1, \alpha_2 \in R$, niin $H \in L_{var}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$ ja

$$H \cdot (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 (H \cdot A_1) + \alpha_2 (H \cdot A_2),$$

iii. jos $H \in L_{var}(A)$, niin

$$(Var \ A)_t = \int_0^t |\sum_{i=1}^d H_s^i a_s^i| dC_s,$$

jossa a^i ja C toteuttavat yhtälön (III.6),

iv. jos $H \in L_{var}(A)$ ja $D \in \mathcal{P}$, niin

$$I_D \cdot (H \cdot A) = (H I_D) \cdot A,$$

v. jos $H \in L_{var}(A)$, niin

$$\Delta(H \cdot A) = \langle H, \Delta A \rangle \quad ja$$

vi. jos $H \in L_{var}(A)$ ja $H_n = H I_{\|H\| \leq n}$, niin

$$H_n \cdot A \xrightarrow[n \to \infty]{ucp} H \cdot A.$$

Todistus. [64] Lemma 3.8 □

Tähän mennessä on määritelty kaksi stokastista vektori-integraalia: toinen lokaalien martingaalien suhteen, määritelmä (III.6), ja toinen äärellisesti heilahtelevien prosessien suhteen, määritelmä (III.9). Ei ole kuitenkaan välittömästi nähtävissä, että nämä määritelmät olisivat yhtenevät prosesseille, jotka kuuluvat sekä avaruuteen $\mathcal{M}^d_{loc}$ että avaruuteen $\mathcal{V}^d$. Tästä syystä käytetään näille integraaleille merkintöjä $(M)H \cdot Y$ ja $(LS)H \cdot Y$. Seuraava tulos selventää hieman tätä asetelmaa.

Lemma III.11. *Oletetaan, että $Z \in \mathcal{V}^d \cap \mathcal{M}^d_{loc}$ ja $H \in L_{var}(Z) \cap L^1_{loc}(Z)$. Silloin on voimassa*

$$(LS)H \cdot Z = (M)H \cdot Z. \tag{III.7}$$

Todistus. Koska lopuksi voidaan aina lokalisoida, riittää aluksi olettaa $H \in L^1(Z)$ ja $\mathbb{E}[Z^i]^{1/2}_\infty < \infty$ kaikilla $i = 1, \cdots, d$. Yhtäsuuruus (III.7) on voimassa prosesseilla $H = \lambda I_D$, jossa $\lambda \in \mathbb{R}^d$ ja $D \in \mathcal{P}$.

Olkoon H nyt rajoitettu ennustettava prosessi, jolloin sitä voidaan approksimoida tasaisesti prosesseilla $H_n = \Sigma_k \lambda_{n,k} I_{D_{n,k}}$, jossa $D_{n,k} \in \mathcal{P}$. Tällöin yhtälö (III.7) on voimassa prosesseilla H_n ja saadaan

$$(LS)H_n \cdot Z \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} (LS)H \cdot Z, \quad (M)H_n \cdot Z \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{H}^1} (M)H \cdot Z,$$

joten myös

$$(M)H_n \cdot Z \xrightarrow[n\to\infty]{ucp} (M)H \cdot Z$$

ja yhtälö (III.7) on siis voimassa rajoitetuille ennustettaville prosesseille H.

Prosessien $H \in L_{var}(Z) \cap L^1(Z)$ tapauksessa edetään samoin kuin edellä, approksimoivan jonon ollessa $H_n = HI_{\{\|H\| \le n\}}$. $\square$

Seuraus III.12. *Olkoon $X = A + M = A' + M'$, jossa $A, A' \in \mathcal{V}^d$, $M, M' \in \mathcal{M}^d_{loc}$ ja*

$$H \in L_{var}(A) \cap L^1_{loc}(M) \cap L_{var}(A') \cap L^1_{loc}(M').$$

Tällöin

$$(LS)H \cdot A + (M)H \cdot M = (LS)H \cdot A' + (M)H \cdot M'.$$

Määritellään seuraavaksi stokastinen vektori-integraali moniulotteisen semimartingaalin suhteen.

Määritelmä III.13. Olkoon $X \in \mathcal{S}^d$. Prosessi H on X-integroituva, jos on olemassa hajotelma $X = M + A$, jossa $\mathcal{A} \in \mathcal{V}^d$ ja $M \in \mathcal{M}^d_{loc}$ ja $H \in L_{var}(A) \cap L^1_{loc}(M)$. Tällöin stokastinen vektori-integraali määritellään prosessina

$$H \cdot X = (LS)H \cdot A + (M)H \cdot M \quad ja$$

X-integroituvien prosessien avaruutta merkitään $L(X)$.

Huomautus. Avaruuteen $L(X)$ kuuluvat kaikki lokaalisti rajoitetut ennustettavat prosessit.

Stokastinen integraali on nyt määritelty ennustettaville integroitaville. Luonnostaan herää kysymys, voitaisiinko integroitavien prosessien luokkaa laajentaa kattamaan prosessit, joilla on D-polut. Jos stokastisen integraalin lokaalin martingaalin suhteen halutaan olevan jälleen lokaali martingaali, on vastaus kieltävä.

Otetaan yksinkertainen esimerkki. Olkoon N Poisson-prosessi parametrilla $\lambda = 1$, $X_t = N_t - t$ ja $C_t = I_{\{t<T\}}$, jossa T on prosessin N ensimmäinen hyppyhetki. Nyt prosessilla C on D-polut ja $(C \cdot X)_t = -(t \wedge T)$, joka aina vähenevänä prosessina ei voi olla lokaali martingaali. Tämä prosessi on kuitenkin semimartingaali.

Entä integroitaessa semimartingaalien suhteen? Pratelli [59] on osoittanut, että optionaalisten prosessien stokastinen integrointi on mahdollista dominoidun konvergenssin lauseen pätiessä, jos ja vain jos semimartingaaleille X, joiden suhteen integroidaan, on voimassa $\Sigma_{0<s\leq t}|\Delta X_s| < \infty$ melkein varmasti kaikilla $t > 0$. Lähestyen tätä kysymystä hieman toisesta suunnasta Ahn ja Protter [1] ovat konstruoineet martingaalin M ja prosessin H, jolla on D-polut, joilla stokastinen integraali $H \cdot M$ on mielekkäästi määritelty muttei semimartingaali.

Erityisillä semimartingaaleilla on voimassa seuraava tulos.

Lause III.14. *Olkoon $X \in \mathcal{S}_p^d$ ja olkoon $X = X_0 + M + A$ semimartingaalin X kanoninen hajotelma. Nyt prosesseille $H \in L(X)$ on voimassa*

$$H \cdot X \in \mathcal{S}_p \Leftrightarrow H \in L_{var}(A) \cap L^1_{loc}(M),$$

tällöin prosessin $H \cdot X$ kanoninen hajotelma on seuraava:

$$H \cdot X = H \cdot A + H \cdot M. \tag{III.8}$$

Todistus. [64] Lemma 4.2 □

Stokastisella vektori-integraalilla on lisäksi seuraavia ominaisuuksia.

Lause III.15. *Olkoon $X, X_1, X_2 \in \mathcal{S}^d$. Silloin stokastisella vektori-integraalilla on seuraavat ominaisuudet:*

i. jos $H \in L^1(X_1) \cap L^1(X_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, niin $H \in L(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)$ ja

$$H \cdot (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 (H \cdot X_1) + \alpha_2 (H \cdot X_2),$$

ii. jos $H_1, H_2 \in L(X)$ ja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, niin $\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 \in L(X)$ ja

$$(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) \cdot X = \alpha_1 (H_1 \cdot X) + \alpha_2 (H_2 \cdot X),$$

iii. jos $H \in L(X)$ ja K on yksiulotteinen ennustettava prosessi, niin

$$K \in L(H \cdot X) \Leftrightarrow KH \in L(X) \tag{III.9}$$

ja silloin

$$K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X,$$

iv. *olkoon H d-ulotteinen prosessi, $H^i \in L(X^i)$ ja $Y^i = H^i \cdot X^i$ kaikilla $i = 1, \cdots, d$. Olkoon K d-ulotteinen ennustettava prosessi ja $J^i = K^i H^i$, $J = J^1, \cdots, J^d$. Tällöin on voimassa*

$$K \in L(Y) \Leftrightarrow J \in L(X)$$

ja silloin

$$K \cdot Y = J \cdot X \quad ja$$

v. *olkoon $X \in \mathcal{S}^d$, $Y \in \mathcal{S}^e$, $H \in L(X)$ ja $K \in L(Y)$. Valitaan $C \in \mathcal{V}^+$ ja optionaaliset prosessit π^{ij}, ρ^{ij} ja σ^{ij} sellaisiksi, että on voimassa $[X^i, X^j] = \pi^{ij} \cdot C$, $[X^i, Y^j] = \rho^{ij} \cdot C$ ja $[Y^i, Y^j] = \sigma^{ij} \cdot C$. Silloin $\sum_{i,j=1}^{d,e} H^i \rho^{ij} K^j \in L(C)$ ja*

$$[H \cdot X, K \cdot Y] = \left(\sum_{i,j=1}^{d,e} H^i \rho^{ij} K^j \right) \cdot C.$$

Todistus. [64] Ch. 4.1 ja 4.5 □

Mainitaan vielä muutamia prosessin $[\ ,\ ]$ ominaisuuksia.

Lause III.16.

i. *Jos prosessit X ja Y ovat semimartingaaleja, niin*

$$[X, Y] = XY - X_0 Y_0 - X_- \cdot Y - Y_- \cdot X.$$

ii. *Jos $X \in \mathcal{S}$ ja $Y \in \mathcal{V}$, niin $[X, Y] = \Delta X \cdot Y$ ja $XY = Y_- \cdot X + X \cdot Y$. Jos lisäksi prosessi Y on ennustettava, niin $[X, Y] = \Delta Y \cdot X$ ja $XY = Y \cdot X + X_- \cdot Y$.*

Todistus. [42] Ch. I.4e □

Emeryn topologia

Seuraavan semimartingaalimetriikan avaruudessa $\mathcal{S}$ esitteli M. Emery [29].

Määritelmä III.17. Olkoon $X, Y \in \mathcal{S}$. Tällöin prosessien X ja Y Emeryn etäisyys on

$$d(X, Y) = \sup_{|H| \leq 1} \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \mathbb{E}\big(1 \wedge |(H \cdot (X - Y))_m|\big) \Big\},$$

jossa supremum otetaan yli kaikkien ennustettavien prosessien H, $|H| \leq 1$. Tämän invariantin metriikan indusoimaa topologiaa kutsutaan Emeryn topologiaksi ja suppenemista tässä topologiassa merkitään $X_n \xrightarrow{\mathcal{S}} X$. Emery osoitti lisäksi, että avaruus $\mathcal{S}$ on täydellinen topologinen vektoriavaruus varustettuna normilla $\|X\|_{\mathcal{S}} = d(X, 0)$ ([29] Thm. 1).

Huomautus. Jos $M_n \xrightarrow{\mathcal{H}^1} M$, niin $M_n \xrightarrow{\mathcal{S}} M$, ja Emeryn topologia on hienompi kuin ucp-topologia.

Kuten seuraavat lauseet tulevat osoittamaan, Emeryn topologia tarjoaa itse asiassa vaihtoehtoisen lähtökohdan stokastisen integroinnin määrittelylle, jota C.S. Chou, P.-A. Meyer ja C. Stricker käyttivät yksiulotteisessa tapauksessa lähestyessään stokastista integraalia raja-arvona jonosta $(H_n \cdot X)$ Emeryn topologiassa [13].

Lemma III.18. *Olkoon $X \in \mathcal{S}^d$, $H \in L(X)$ ja $H_n = HI_{\{\|H\| \leq n\}}$. Tällöin*

$$H_n \cdot X \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} H \cdot X.$$

Todistus. [64] Lemma 4.11 □

Lemma III.19. *Olkoon $X \in \mathcal{S}^d$ ja (H_n) jono ennustettavia d-ulotteisia prosesseja, jotka lähestyvät prosessia H kaikilla ω ja t. Oletetaan, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolla $\|H_n\| \leq c$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Silloin*

$$H_n \cdot X \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} H \cdot X.$$

Todistus. [64] Lemma 4.12 □

Lemma III.20. *Olkoon $X \in \mathcal{S}^d$, H d-ulotteinen ennustettava prosessi ja $H_n = HI_{\{\|H\| \leq n\}}$. Oletetaan, että jono $(H_n \cdot X)$ suppenee Emeryn topologiassa kohti prosessia Z. Tällöin $H \in L(X)$ ja $Z = H \cdot X$.*

Todistus. [64] Lemma 4.13 □

Nämä lauseet osoittavat, että H kuuluu avaruuteen $L(X)$, jos ja vain jos jono $(H_n \cdot X)$ suppenee Emeryn topologiassa.

Emeryn topologia ja stokastinen vektori-integraali käyttäytyvät miellyttävästi myös absoluuttisesti jatkuvissa mitanvaihdoissa.

Lemma III.21. *Jos jono (X_n) suppenee kohti prosessia X Emeryn topologiassa mitan $\mathbb{P}$ suhteen ja $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, niin jono (X_n) suppenee kohti prosessia X Emeryn topologiassa mitan $\mathbb{Q}$ suhteen.*

Todistus. Avaruus $\mathcal{S}(\mathbb{P})$ (vast. avaruus $\mathcal{S}(\mathbb{Q})$) on täydellinen normin $\|\cdot\|_{\mathcal{S}(\mathbb{P})}$ (vast. normin $\|\cdot\|_{\mathcal{S}(\mathbb{Q})}$) suhteen. Tarkastellaan lineaarista kuvausta

$$\Lambda : \mathcal{S}(\mathbb{P}) \ni X \longmapsto X \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}).$$

Olkoon $X_n \in \mathcal{S}(\mathbb{P})$ ja $X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{ucp} X$. Tällöin on voimassa $\Lambda X_n \xrightarrow[\mathbb{Q}]{ucp} \Lambda X$, joten kuvauksen Λ kuvaaja on suljettu ucp-topologiassa (ks. [62] Remark s.50) ja siten myös Emeryn topologiassa. Suljetun kuvaajan lauseen ([62] Thm. 2.15) perusteella kuvaus Λ on jatkuva, josta väite seuraa. □

Lause III.22. *Olkoon $X \in \mathcal{S}^d(\mathbb{P})$, $H \in L_{\mathbb{P}}(X)$ ja $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, niin $X \in \mathcal{S}^d(\mathbb{Q})$, $H \in L_{\mathbb{Q}}(X)$ ja*

$$(\mathbb{P})H \cdot X = (\mathbb{Q})H \cdot X, \tag{III.10}$$

jossa integraali $(\mathbb{P})H \cdot X$ on määritelty $\mathbb{P}$-erottamattomuuteen asti ja integraali $(\mathbb{Q})H \cdot X$ on määritelty $\mathbb{Q}$-erottamattomuuteen asti.

Todistus. [64] Thm. 4.14 □

Tässä esityksessä määriteltyjen stokastisten vektori-integraalien muodostama avaruus $\mathcal{G}(X)$, kiinteän semimartingaalin X suhteen, on myös suljettu Emeryn topologiassa.

Lause III.23. *Olkoon $X \in \mathcal{S}^d$. Silloin avaruus*

$$\mathcal{G}(X) = \{H \cdot X : H \in L(X)\}$$

on suljettu Emeryn topologiassa.

Todistus. [53] Thm. V.4 □

Lisäksi avaruudessa $\mathcal{H}^1$ on voimassa seuraava tulos.

Lemma III.24. *Olkoon $X \in \mathcal{S}^d$. Silloin avaruus*

$$\mathcal{G}^1(X) = \{x + H \cdot X : x \in \mathbb{R},\ H \in L(X)\ ja\ H \cdot X \in \mathcal{H}^1\}$$

on avaruuden $\mathcal{H}^1$ vakaa aliavaruus.

Todistus. Koska suppeneminen avaruudessa $\mathcal{H}^1$ on voimakkaampaa kuin suppeneminen Emeryn topologiassa, on avaruus

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^1_0(X) &= \{H \cdot X : H \in L(X)\ ja\ H \cdot X \in \mathcal{H}^1\} \\ &= \{H \cdot X : H \in L(X)\} \cap \mathcal{H}^1\end{aligned}$$

suljettu avaruudessa $\mathcal{H}^1$.

Hahnin ja Banachin lauseen ([33] Ch. 4.8) perusteella avaruudessa $\mathcal{H}^1$ on olemassa jatkuva lineaarinen funktionaali Λ, joka on yhtäsuuri kuin nolla avaruudessa $\mathcal{G}^1_0(X)$ ja muutoin erisuuri kuin nolla. Jos jono $(x_n + H_n \cdot X) \in \mathcal{G}^1(X)$ suppenee avaruudessa $\mathcal{H}^1$, niin myös jono $\Lambda(x_n + H_n \cdot X)\mathbb{R}$ suppenee. Edellä valitulla funktionaalilla on voimassa $\Lambda(x_n + H_n \cdot X) = \alpha x_n$, jossa $\alpha \neq 0$. Täten jono x_n suppenee avaruudessa $\mathbb{R}$ ja jono $(H_n \cdot X)$ suppenee avaruudessa $\mathcal{H}^1$. Tästä seuraa, koska edellä saatiin, että avaruus $\mathcal{G}^1_0(X)$ on suljettu, että myös avaruus $\mathcal{G}^1(X)$ on suljettu.

Lisäksi olkoon $H \in L(X)$, $A \in \mathcal{F}_0$ ja τ pysäytyshetki. Tällöin saadaan

$$I_A(x+(H \cdot X))^\tau = xI_{A\times[0,\tau]}+(H \cdot X)^\tau = xI_{A\times[0,\tau]}+(HI_{A\times[0,\tau]} \cdot X) \in \mathcal{G}^1(X),$$

joten $\mathcal{G}^1(X)$ on avaruuden $\mathcal{H}^1$ vakaa aliavaruus. □

Määritellään nyt komponenteittainen stokastinen integraali.

Määritelmä III.25. Olkoon $X \in \mathcal{S}^d$, d-ulotteinen prosessi $H = (H_t^1, \cdots, H_t^d)_{t\geq 0}$ on komponenteittain X-integroituva, jos $H^i \in L(X^i)$ kaikilla $i = 1, \cdots, d$. Komponenteittainen stokastinen integraali määritellään summana $\sum_{i=1}^d H^i \cdot X^i$.

Lause III.26. *Jos prosessi H on komponenteittain X-integroituva, niin se on myös X-integroituva ja*

$$H \cdot X = \sum_{i=1}^{d} H^i \cdot X^i.$$

Todistus. Olkoon hajotelma $X^i = A^i + M^i$ sellainen, että kaikilla $i = 1, \cdots, d$ on voimassa $H^i \in L_{var}(A^i) \cap L^1_{loc}(M^i)$. Olkoon $M = (M^1, \cdots, M^d)$, $A = (A^1, \cdots, A^d)$ ja $K_i = (k_1, \cdots, k_d)$ d-ulotteinen prosessi, jonka komponenteilla on voimassa $k_j = 0, j \neq i$ ja $k_i = H^i$. Nyt $K_i \in L_{var}(A) \cap L^1_{loc}(M)$ kaikilla $i = 1, \cdots, d$ ja $K_i \cdot X = H^i \cdot X^i$. Lisäksi stokastisen vektori-integraalin ominaisuuksien perusteella saadaan

$$H \cdot X = \left(\sum_{i=1}^{d} K_i\right) \cdot X = \sum_{i=1}^{d} K_i \cdot X = \sum_{i=1}^{d} H^i \cdot X^i.$$

□

Vaikka komponenteittaisen stokastisen integraalin olemassaolo takaakin edeltävän lauseen perusteella aina stokastisen vektori-integraalin olemassaolon ja sen, että silloin nämä integraalit yhtyvät, ei päinvastainen ole aina voimassa, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki III.27. *Olkoon $X \in \mathcal{S}$ ja K ennustettava yksiulotteinen prosessi, joka ei kuulu avaruuteen $L(X)$. Asetetaan*

$$Z = (X, X), \quad H = (K, -K).$$

Nyt $\sum_{i,j}^d H_s^i \pi_s^{ij} H_s^j = 0$ ja $\sum_i^d H_s^i a_s^i = 0$, joten $H \in L(X)$ ja $H \cdot X = 0$. Toisaalta määritelmän mukaan komponenteittainen stokastinen integraali ei ole olemassa.

Seuraavasta Jacodilta [40] peräisin olevasta esimerkistä nähdään, ettei komponenteittaisten stokastisten integraalien muodostama avaruus ole myöskään välttämättä suljettu Emeryn topologiassa.

Esimerkki III.28. *Olkoot W^1 ja W^2 kaksi riippumatonta Brownin liikettä, prosessi $J_t = t$ ja määritellään kaksiulotteinen prosessi X seuraavasti*

$$X^1 = W^1, \quad X^2 = (1 - J) \cdot W^1 + J \cdot W^2.$$

Osoitetaan, että avaruus

$$\mathcal{G}_{\mathsf{C}}(X) = \left\{\sum_{i=1}^{2} H^i \cdot X^i : H^i \in L(X^i)\right\}$$

ei ole suljettu Emeryn topologiassa.

Mille tahansa $\epsilon > 0$ *on voimassa*

$$1 - \frac{1}{J+\epsilon} \in L(X^1), \quad \frac{1}{J+\epsilon} \in L(X^2)$$

ja lauseen (III.15) *kohtien ii. ja iii. perusteella saadaan*

$$\begin{aligned} Z_\epsilon &= \left(1 - \frac{1}{J+\epsilon}\right) \cdot X^1 + \frac{1}{J+\epsilon} \cdot X^2 \\ &= \frac{\epsilon}{J+\epsilon} \cdot W^1 - \frac{\epsilon}{J+\epsilon} \cdot W^2 + W^2 \in G_{\mathsf{C}}(X). \end{aligned}$$

Edelleen kaikilla $t \geq 0$ *saadaan*

$$\left(\frac{\epsilon}{J+\epsilon} \cdot W^k\right)_t = \int_0^t \left(\frac{\epsilon}{J_s+\epsilon}\right)^2 ds = \int_0^t \left(\frac{\epsilon}{s+\epsilon}\right)^2 ds \underset{\epsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

jonka seurauksena saadaan $Z_\epsilon \underset{\epsilon\downarrow 0}{\xrightarrow{\mathcal{S}}} W^2$.

Edetään reductio ad absurdum ja oletetaan, että on olemassa prosessit $H^i \in L(X^i)$, $i = 1, 2$, *joilla pätee*

$$H^1 \cdot X^1 + H^2 \cdot X^2 = W^2.$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned} M^1 = K^1 \cdot W^1 &= (H^1 + (1-J)H^2) \cdot W^1 \\ &= (1 - JH^2) \cdot W^2 = K^2 \cdot W^2 = M^2. \end{aligned} \quad \text{(III.11)}$$

Nyt lauseen (III.15) *v. nojalla saadaan* $[K^1 \cdot W^1, K^2 \cdot W^2] = 0$, *joten* $M^1 = M^2 = 0$. *Edelleen lauseen* (III.7) *ii. perusteella*

$$K^2 = 1 - JH^2 = 0 \quad \mathbb{P} \times Leb\, m.v.,$$

joten saadaan

$$H^1 = 1 - \frac{1}{J}, \quad H^2 = \frac{1}{J} \quad \mathbb{P} \times Leb\, m.v.,$$

josta seuraa $H^1 \notin L^1_{loc}(W^1)$.

Koska $H^1 \in L(X^1)$, *on olemassa hajotelma* $X^1 = A + N$, *jossa* $A \in \mathcal{V}$ *ja* $N \in \mathcal{M}_{loc}$ *ja* $H^1 \in L_{var}(A) \cap L^1_{loc}(N)$. *Nyt on olemassa hajotelma*

$$[N]_t = [N^c]_t + \Sigma_{s \leq t}(\Delta N_s)^2,$$

jossa N^c *on lokaalin martingaalin* N *jatkuva martingaaliosa ([42] Ch. I, 4.18,4.52). Koska* X^1 *on jatkuva,* $N^c = X^1$, *joten* $[N] = [X^1] + U$, *jossa prosessi* $U \in \mathcal{V}^+$. *Edelleen saadaan* $H^1 \in L^1_{loc}(X^1) = L^1_{loc}(W^1)$, *joka on ristiriita. Täten* $W^2 \notin \mathcal{G}_{\mathsf{C}}(X)$ *ja* $\mathcal{G}_{\mathsf{C}}(X)$ *ei ole suljettu Emeryn topologiassa.*

Näiden esimerkkien valossa on stokastisen vektori-integraalin määritteleminen komponenteittaista stokastista integraalia yleisemmässä muodossa osoittautunut tarpeelliseksi. Lisäksi Cherny [10] on osoittanut, että stokastiset vektori-integraalit ovat olennaisia rahoitusteorian ensimmmäisen päälauseen[3] pätevyydelle ja Chatelain ja Stricker [8, 9], Galtchouk [34], Jarrow ja Madan [43] sekä Shiryaev ja Cherny [64] ovat painottaneet niiden merkitystä markkinamallien täydellisyyttä koskevissa kysymyksissä.

Stokastisen integroinnin teoriaa kehitetään vieläkin, kohti yleisempiä prosessien luokkia, joiden suhteen stokastinen integraali voidaan määritellä. Lähiaikoina kiinnostus on kohdistunut paljolti prosesseihin, jotka eivät ole semimartingaaleja. Esimerkki tälläisestä prosessista on fraktionaalinen Brownin liike, jonka suhteen saavutettuja tuloksia Decreusefond on koonnut artikkeliinsa [17]. On kuitenkin huomattava määriteltäessä stokastista integraalia sellaisen prosessin X suhteen, joka ei ole semimartingaali, että Bichtelerin, Dellacherien ja Mokobodskin lause [4] rajoittaa sen ominaisuuksia. Jos (H^n) on vähenevä jono porrasfunktioita, joka lähestyy nollaa kaikilla ω ja t, niin stokastista integraalia ei voida määritellä tavalla, jolla $H^n \cdot X \to 0$ avaruudessa L^p kaikilla tällaisilla jonoilla (H^n).

Toinen alue, jolla stokastisen integraalin tutkimista on jatkettu, on integrointi ääretönulotteisten prosessien X suhteen. Prosessin X arvojen kuuluessa Hilbertin avaruuteen ei stokastisen integraalin konstruktiossa ole ongelmia (ks. [55]). Jos prosessin X arvot kuuluvatkin Banachin avaruuteen, on ongelma vaikeampi eikä tyydyttävää ratkaisua ole vielä löydetty.

Björk, Di Masi, Kabanov ja Runggaldier [5] ovat tutkineet stokastista integrointia lainamarkkinamallien tarpeiden kannalta. He ovat tarkastelleet prosesseja P, jotka saavat arvoja Banachin avaruudessa C_{T}, jonka muodostavat joukon $[0, \infty]$ kompaktilla osajoukolla T arvoja saavat jatkuvat funktiot. Mitä tulee yleisempään stokastisen integroinnin teoriaan Banachin avaruudessa arvoja saavien prosessien suhteen, on Dinculeanu kerännyt kirjaansa [24] lähiaikojen saavutuksia.

[3] fi rst fundamental theorem of asset pricing

IV. $\mathcal{E}$-MARTINGAALIT

Stokastinen eksponentti

Stokastinen eksponentti on ratkaisu erääseen yksinkertaiseen mutta tärkeään stokastiseen differentiaaliyhtälöön, jonka ratkaisun löysi ensimmäisenä C. Doléans-Dade [25].

Lause IV.1. *Olkoon X semimartingaali ja $X_0 = 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen semimartingaali Z, joka toteuttaa yhtälön*

$$Z = 1 + Z_- \cdot X \quad (tai\ dZ = Z_- dX,\ Z_0 = 1) \tag{IV.1}$$

ja

$$Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X, X]_t^c\right) \prod_{s \le t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s), \tag{IV.2}$$

jossa ääretön tulo suppenee tasaisesti melkein varmasti. Prosessista Z käytetään merkintää $\mathcal{E}(X)$ ja tätä prosessia kutsutaan stokastiseksi eksponentiksi[1].

Todistus. Todetaan ensimmäiseksi, että prosessi Z on semimartingaali. Koska prosessi $X_t - \frac{1}{2}[X, X]_t^c$ on semimartingaali ja $\exp(x)$ kuuluu luokkaan C^2, riittää prosessin $\prod_{s \le t}(1+\Delta X_s) \exp(-\Delta X_s)$ osoittaminen D-polulliseksi, $\mathbb{F}$-sopivaksi ja äärellisesti heilahtelevaksi, jolloin se on semimartingaali. Tällöin myös prosessi Z on semimartingaali. Tällä mahdollisesti ääretöntermisellä tulolla on selvästi D-polut ja se on $\mathbb{F}$-sopiva, joten on riittävää osoittaa tulon suppenevan ja sen olevan äärellisesti heilahteleva.

Koska prosessilla X on D-polut, millä tahansa kiinteällä ω on olemassa jokaisella kompaktilla välillä vain äärellinen määrä hetkiä s, joilla prosessin X hypylle pätee $|\Delta X_s| \ge \frac{1}{2}$. Riittää siis osoittaa tulon

$$\tilde{V}_t = \prod_{s \le t} (1 + \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| < \frac{1}{2}\}}) \exp(-\Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| < \frac{1}{2}\}})$$

suppenevan ja olevan äärellisesti heilahteleva. Olkoon $u_s = \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| < \frac{1}{2}\}}$, jolloin $\log \tilde{V}_t = \sum_{s \le t} (\log(1 + u_s) - u_s)$. Tämä summa suppenee tasaisesti, koska $|\log(1 + x) - x| \le x^2$, kun on voimassa $|x| < \frac{1}{2}$, ja toisaalta

[1] Prosessia $\mathcal{E}(X)$ kutsutaan myös Doléansin eksponentiksi.

$\sum_{0<s\leq t} u_s^2 \leq [X,X]_t < \infty$ melkein varmasti. Joten prosessi $\log \tilde{V}_t$ on äärellisesti heilahteleva prosessi ja niin myös prosessi $\exp(\log \tilde{V}_t) = \tilde{V}_t$.

Osoitetaan seuraavaksi prosessin Z olevan yhtälön (IV.1) ratkaisu. Olkoon

$$V_t = \prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)\exp(-\Delta X_s), \tag{IV.3}$$

$$G = X - X_0 - \frac{1}{2}[X,X]_t^c \quad ja \tag{IV.4}$$

$$U = Ve^G = \mathcal{E}(X). \tag{IV.5}$$

Nyt soveltamalla Itôn kaavaa kuvaukseen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ye^x$ saadaan

$$\begin{aligned} U =& 1 + U_- \cdot G + e^{G_-} \cdot V + \frac{1}{2}U_- \cdot [G,G]_t^c \\ &+ \sum_{s\leq \cdot}(\Delta U_s - U_{s-}\Delta G_s - e^{Z_{s-}}\Delta V_s), \end{aligned} \tag{IV.6}$$

koska $V^c = 0$. Lisäksi prosessin G määritelmästä saadaan $G^c = X^c$, joten

$$G + \frac{1}{2}[G,G]^c = X - X_0. \tag{IV.7}$$

Prosessi V taasen on täysin epäjatkuva hyppyprosessi, joten on voimassa

$$e^{G_-} \cdot V = \sum_{s\leq t} e^{Z_{s-}}\Delta V_s. \tag{IV.8}$$

Lisäksi pätee

$$\begin{aligned} \Delta U_s &= U_s - U_{s-} \\ &= e^{G_{s-}+\Delta G_s}V_{s-}(1-\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} - e^{G_{s-}}V_{s-} \\ &= U_{s-}\Delta G_s, \end{aligned} \tag{IV.9}$$

koska prosessin G hypyillä ΔG on ominaisuus $\Delta G = \Delta X$. Nyt sijoittamalla yhtälöt (IV.7), (IV.8) ja (IV.9) yhtälöön (IV.6) saadaan

$$U = 1 + U_- \cdot (X - X_0) = 1 + U_- \cdot X.$$

Prosessi $U = \mathcal{E}(X)$ on siis yhtälön (IV.1) ratkaisu.

Osoitetaan seuraavaksi ratkaisujen yksikäsitteisyys. Olkoon Y yhtälön (IV.1) jokin $\mathbb{F}$-sopiva ratkaisu, jolla on D-polut. Stokastisena integraalina semimartingaalin suhteen myös se on semimartingaali. Olkoon $H = Ye^{-G}$ ja sovelletaan Itôn kaavaa kuvaukseen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ye^x$. Saadaan

$$\begin{aligned} H =& 1 - H_- \cdot G + e^{-G_-} \cdot Y \\ &+ \frac{1}{2}H_- \cdot [G,G]^c - e^{-G_-} \cdot [G,Y]^c \\ &+ \sum_{s\leq \cdot}(\Delta H_s + H_{s-}\Delta G_s - e^{-G_{s-}}\Delta Y_s). \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Koska Y on yhtälön (IV.1) ratkaisu, pätee sen hyppyprosessille $\Delta Y = Y_- \Delta X$ ja, koska $\Delta G = \Delta X$, on voimassa

$$\begin{aligned} \Delta H_s &= e^{-G_{s-} - \Delta G_s}(Y_{s-} + \Delta Y_s) - e^{-G_{s-}} Y_{s-} \\ &= H_{s-}(e^{-\Delta X_s}(1 + \Delta X_s) - 1). \end{aligned} \tag{IV.11}$$

Lisäksi stokastisen integraalin ominaisuuksien perusteella saadaan

$$[G, Y]^c = Y_- \cdot [G, X]^c = Y_- \cdot [G, G]^c. \tag{IV.12}$$

Yhdistetään yhtälöt (IV.11), (IV.12), (IV.7) ja yhtälö $\Delta Y = Y_- \Delta X = Y_- \Delta G$ yhtälöön (IV.10). Seurauksena saadaan prosessille H

$$\begin{aligned} H &= 1 - H_- \cdot X + e^{-G_-} \cdot Y + \sum_{s \leq \cdot} H_{s-}(e^{-\Delta X_s}(1 + \Delta X_s) - 1 + \Delta G_s - \Delta G_s) \\ &= 1 - H_- \cdot X + H_- \cdot X + \sum_{s \leq \cdot} H_{s-}(e^{-\Delta X_s}(1 + \Delta X_s) - 1) \\ &= 1 + H_- \cdot A, \end{aligned} \tag{IV.13}$$

jossa prosessi $A_t = \sum_{s \leq t}(e^{-\Delta X_s}(1 + \Delta X_s) - 1)$ on äärellisesti heilahteleva. Äärellisesti heilahtelevuus seuraa epäyhtälöstä $|e^{-x}(1 + x) - 1| \leq C|x|^2$, joka on voimassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla $|x| \leq \frac{1}{2}$, ja jollain vakiolla C.

On jo todistettu, että prosessi $Y = U = \mathcal{E}(X)$ on yhtälön (IV.1) ratkaisu. Tässä tapauksessa saadaan $H = Ue^{-G} = V$, jolloin on voimassa $V = 1 - V_- \cdot A$. Olkoon Y nyt yhtälön (IV.1) jokin toinen ratkaisu ja $H = Ye^{-G}$ ja $\tilde{H} = H - V$. Nyt yhtälön (IV.13) nojalla saadaan

$$\tilde{H}_t = \int_0^t \tilde{H}_{s-} dA_s. \tag{IV.14}$$

Olkoon $S = \inf\{t : \tilde{H}_t \neq 0\}$. Havaitaan, että on voimassa $\tilde{H}_S = 0$ joukossa $\{S < \infty\}$. Nyt on olemassa $S' \geq S$, jolla on voimassa $\{S < \infty\} \subset \{S' < S\}$ ja $\int_{(S,S']} |dA_s| \leq \frac{1}{2}$. Koska yhtälön (IV.14) perusteella kaikilla $t > S$ on voimassa

$$\tilde{H}_t = \tilde{H}_S + \int_{(S,t]} \tilde{H}_{s-} dA_s = \int_{(S,t]} \tilde{H}_{s-} dA_s,$$

saadaan

$$\sup_{t \leq S'} |\tilde{H}_t| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \leq S'} |\tilde{H}_t|.$$

Seurauksena saadaan, että $\sup_{t \leq S'} |\tilde{H}_t| = 0$. Koska $S' > S$ joukossa $\{S < \infty\}$, saadaan $S = \infty$. Joten kaiken kaikkiaan on osoitettu, että $\tilde{H}_t = 0$ kaikilla t, eli $H = V$ ja $Y = He^G = Ve^G = U = \mathcal{E}(X)$. Täten prosessi $\mathcal{E}(X)$ on yhtälön (IV.1) yksikäsitteinen ratkaisu. □

Huomautus. Stokastisella eksponentilla on seuraavia yksinkertaisia ominaisuuksia.

i. Jos prosessi X on äärellisesti heilahteleva, niin on myös prosessi $\mathcal{E}(X)$.

ii. Jos prosessi X on lokaali martingaali, niin on myös prosessi $\mathcal{E}(X)$.

iii. Jos τ on pysätyshetki, niin $\mathcal{E}(X)^\tau = \mathcal{E}(X^\tau)$.

iv. Olkoon $T = \inf\{t : \Delta X_t = -1\}$. Silloin on voimassa $\mathcal{E}(X) \neq 0$ välillä $[0, T)$, $\mathcal{E}(X)_- \neq 0$ välillä $[0, T]$ ja $\mathcal{E}(X) = 0$ välillä $[T, \infty)$.

Nyt määritelty stokastinen eksponentti on tavallisen eksponenttifunktion yleistys siinä mielessä, että molemmat ovat lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja. Myöhemmin nähdään, että kahden stokastisen eksponentin tulolle on voimassa vastaava laskusääntö kuin tavalliselle eksponenttifunktiolle. Lisäksi tietyin ehdoin kuvauksella $X \mapsto \mathcal{E}(X)$ on myös käänteiskuvaus $\mathcal{L}$, stokastinen logaritmi, jota tarkastellaan seuraavaksi.

Lause IV.2. *Olkoon semimartingaali $Y \neq 0$ melkein varmasti, jolla myös $Y_- \neq 0$ melkein varmasti. Silloin prosessi*

$$\mathcal{L}(Y) := X = \frac{1}{Y_-} \cdot Y \quad (tai\, dX = \frac{1}{Y_-} dY\ X_0 = 0), \tag{IV.15}$$

jota kutsutaan prosessin Y stokastiseksi logaritmiksi, on erottamattomuuteen asti yksikäsitteinen semimartingaali, jolla on voimassa

$$Y = Y_0 \mathcal{E}(X), \quad X_0 = 0. \tag{IV.16}$$

Todistus. Koska prosessit Y ja Y_- ovat melkein varmasti nollasta poikkeavia, kasvaa jono pysäytyshetkiä $T_n = \inf\{t : |Y_{t-}| \leq 1/n\}$ rajatta. Prosessi $1/Y_-$ on siis lokaalisti rajoitettu ja stokastinen integraali yhtälössä (IV.15) on mielekäs. Olkoon $Y' = Y/Y_0$, jolloin $Y'_0 = 1$ ja $X = (1/Y'_-) \cdot Y'$. Lisäksi saadaan

$$1 + Y'_- \cdot X = 1 + Y'_- \cdot \left(\frac{1}{Y'_-} \cdot Y' \right) = 1 + \left(\frac{1}{Y'_-} Y'_- \right) \cdot Y' = Y'.$$

Joten pätee $Y' = \mathcal{E}(X)$ ja lisäksi $\Delta X = \Delta Y / Y_- \neq 0$.

Olkoon X' mikä tahansa yhtälön (IV.16) toteuttava semimartingaali. Jälleen saadaan $Y' = \mathcal{E}(X)$ ja $Y' = 1 + Y'_- \cdot X'$, joten on voimassa $Y = Y_0 + Y_- \cdot X'$. Edelleen $X'_0 = X_0 = 0$ ja saadaan

$$X' = \frac{Y_-}{Y_-} \cdot X' = \frac{1}{Y_-} \cdot (Y - Y_0) = \frac{1}{Y_-} \cdot Y = X.$$

Ratkaisu on siis myös yksikäsitteinen. □

Huomautus. On hyvä havaita, että prosessin Y ei tarvitse olla positiivinen, jotta stokastinen logaritmi $\mathcal{L}(Y)$ olisi olemassa. Stokastinen eksponenttihan voi saada negatiivisiakin arvoja.

Edeltävien lauseidein perusteella $\mathcal{E}$ on siis bijektio erottamattomien semimartingaalien X, joilla $\Delta X \neq -1$ ja $X_0 = 0$, muodostamilta ekvivalenssiluokilta erottamattomien semimartingaalien Y, joilla $Y \neq 0$ ja $Y_- \neq 0$ melkein varmasti sekä $Y_0 = 1$, muodostamille ekvivalenssiluokille, käänteiskuvauksen ollessa $\mathcal{L}$.

Seuraava lemma antaa esimerkin perheestä martingaaleja, jotka voidaan esittää stokastisena eksponenttina.

Lemma IV.3. *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja prosessi* $Y \in \mathcal{M}^p$ *ja* $Y_0 = 1$*, sekä olkoon vakio* C *sellainen, että epäyhtälö*

$$\mathbb{E}[|Y_T|^p|\mathcal{F}_\sigma] \leq C|Y_\sigma|^p \tag{IV.17}$$

on voimassa. Tällöin $Y = \mathcal{E}(\mathcal{L}(Y))$*.*

Todistus. [14] Prop. 2.3 □

Seuraava paljon käytetty lemma on peräisin Yorilta.

Lemma IV.4. *Jos prosessit* X *ja* Y *ovat semimartingaaleja, niin on voimassa*

$$\mathcal{E}(X + Y + [X, Y]) = \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y). \tag{IV.18}$$

Todistus. [67] Prop. 4 □

Lemma IV.5. *Olkoon prosessi* N *lokaali martingaali, prosessi* A *äärellisesti heilahteleva ja ennustettava,* $\Delta A \neq -1$ *ja molemmat prosessit* N *ja* A *saavat arvon nolla ajanhetkellä nolla. Silloin on olemassa lokaalisti martingaali prosessi* $\tilde{N}$*,* $\tilde{N}_0 = 0$*, jolla on voimassa*

$$\mathcal{E}(N + A) = \mathcal{E}(\tilde{N})\mathcal{E}(A).$$

Todistus. Osoitetaan ensimmäiseksi, että ennustettava prosessi $(1 + \Delta A)^{-1}$ on lokaalisti rajoitettu. On hyvä huomata prosessin A ollessa kasvava, että hypyille olisi voimassa $\Delta A \geq 0$ ja prosessilla $(1 + \Delta A)^{-1}$ olisi ylärajana 1. Olkoon nyt $n \geq 1$ ja määritellään pysäytyshetket σ_n seuraavasti

$$\sigma_n = \inf\left\{t : |1 + \Delta A| \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Kun n lähestyy ääretöntä, niin myös σ_n lähestyy ääretöntä melkein varmasti. Joukko $\{|1 + \Delta A| \leq 1/n\}$ on ennustettava ja sisältää joukon $[\sigma_n]$. Nyt lauseen (II.31) perusteella σ_n on ennustettava hetki. Joten on olemassa kasvavat jonot pysäytyshetkiä $\sigma_{n,m} < \sigma_n$, $m \geq 1$, jotka lähestyvät melkein varmasti ennustettavia hetkiä σ_n. Asetetaan

$$\tau_n = \sup_{k,m \leq n} \sigma_{k,m},$$

jolloin saadaan $|(1 + \Delta A)^{-1}| \leq n$ välillä $[0, \tau_n]$ ja $\cup_n [0, \tau_n] = \Omega \times \mathbb{R}_+$.

Tarkastellaan seuraavaksi lokaalisti martingaalia prosessia

$$\tilde{N} = \frac{1}{1 + \Delta A} \cdot N.$$

Tälle prosessille saadaan

$$\tilde{N}^c = N^c \quad ja \quad \Delta\tilde{N} = \frac{\Delta N}{1 + \Delta A}.$$

Koska A on ennustettava prosessi, myös prosessi $[\tilde{N}, A] = \Delta\tilde{N}\Delta A$ on lokaali martingaali. Nyt lokaaleilla martingaaleilla N ja $\tilde{N} + [\tilde{N}, A]$ on sama jatkuva osa ja hyppyosa, joten ne ovat samat prosessit. Ja Yorin lemman (IV.4) avulla saadaan

$$\mathcal{E}(\tilde{N})\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A + \tilde{N} + [\tilde{N}, A]) = \mathcal{E}(N + A).$$

□

Tästä lähin, jollei muuta mainita, merkinnällä N tarkoitetaan lokaalia martingaalia, jolla $N_0 = 0$, prosessista $\mathcal{E}(N)$ käytetään merkintää $\mathcal{E}$ ja kaikilla pysäytyshetkillä τ käytetään merkintää ${}^{\tau}\mathcal{E} = \mathcal{E}(N - N^{\tau})$.

Lemma IV.6. *Mille tahansa pysäytyshetkille σ ja τ on voimassa*

i. ${}^{\sigma}\mathcal{E} = {}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau}{}^{\tau}\mathcal{E}$ *joukossa* $\{\sigma \leq \tau\}$ *ja*

ii. ${}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau} = 1$ *joukossa* $\{\sigma \geq \tau\}$.

Todistus. i. Oletetaan, että $\tau \geq \sigma$. Muussa tapauksessa voitaisiin käyttää pysäytyshetkeä $\sigma \vee \tau$ pysäytyshetken τ asemasta. Tarkastellaan prosessia $\mathcal{N} = [N^{\tau} - N^{\sigma}, N - N^{\tau}]$ väleillä $t \leq \sigma$, $\sigma < t \leq \tau$ ja $t > \tau$, jolloin saadaan $\mathcal{N} = 0$. Nyt väite seuraa Yorin lemmasta.

ii. Olkoon $\tau \leq \sigma$. Prosessille ${}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau}$ saadaan

$${}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau} = \mathcal{E}(N^{\tau} - N^{\tau}) = \mathcal{E}(0) = 1.$$

□

Määritelmä IV.7. Olkoon $q \geq 1$. Prosessi $\mathcal{E}(N)$ toteuttaa käänteisen Hölderin (R_q)-epäyhtälön, jos ja vain jos on olemassa vakio $C \geq 1$, jolla kaikilla ajanhetkillä t on voimassa

$$\mathbb{E}[|{}^{t}\mathcal{E}_T|^q | \mathcal{F}_t] \leq C.$$

Huomautus. Jos prosessi ${}^{t}\mathcal{E}$ on martingaali jokaisella hetkellä t, niin Jensenin epäyhtälöstä saadaan $\mathbb{E}[|{}^{t}\mathcal{E}_T|^q | \mathcal{F}_t] \geq 1$. Joten edellisen määritelmän epäyhtälö on ennemminkin käänteinen Jensenin epäyhtälö mutta se on nimetty historiallisista syistä Hölderin mukaan.

Lause IV.8. *Jos prosessi $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_q)-epäyhtälön, niin kaikilla pysäytyshetkillä σ ja τ pätee*

$$\mathbb{E}[|{}^{\tau}\mathcal{E}_T|^q | \mathcal{F}_{\sigma}] \leq C|{}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma}|^q. \tag{IV.19}$$

Todistus. Lemman (IV.6) nojalla ${}^{t}\mathcal{E}_T = {}^{t}\mathcal{E}_s{}^{s}\mathcal{E}_T$, kun $s \geq t$, sekä lisäksi ${}^{t}\mathcal{E}_s \in \mathcal{F}_s$, ja ${}^{t}\mathcal{E}_s = 1$, kun $t \geq s$. Joten saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|{}^{t}\mathcal{E}_T|^q | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[|{}^{t}\mathcal{E}_s|^q |{}^{s}\mathcal{E}_T|^q | \mathcal{F}_s] \\
&= |{}^{t}\mathcal{E}_s|^q \mathbb{E}[|{}^{s}\mathcal{E}_T|^q | \mathcal{F}_s] \\
&\leq C|{}^{t}\mathcal{E}_s|^q,
\end{aligned}$$

kun $s \geq t$, ja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|{}^t\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[|{}^t\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] \\ &\leq C = C|{}^t\mathcal{E}_s|^q,\end{aligned}$$

kun $t \geq s$.

Havaitaan, että yhtälö (IV.19) on voimassa kaikilla yksinkertaisilla pysäytyshetkillä, eli pysäytyshetkillä, jotka saavat vain äärellisen määrän arvoja. Olkoot nyt pysäytyshetket τ ja σ_n yksinkertaisia ja pysäytyshetki σ mielivaltainen, $\sigma_n \downarrow \sigma$. Edeltävän perusteella $\mathbb{E}(|{}^\tau\mathcal{E}_T|^q) < \infty$. Saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|{}^\tau\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_\sigma] &= \lim_n \mathbb{E}[|{}^\tau\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_{\sigma_n}] \\ &\leq C \lim_n |{}^\tau\mathcal{E}_{\sigma_n}|^q \\ &= C|{}^\tau\mathcal{E}_\sigma|^q.\end{aligned}$$

Lopuksi olkoon pysäytyshetki τ mielivaltainen ja τ_n jono yksinkertaisia pysäytyshetkiä, joille on voimassa $\tau_n \downarrow \tau$. Nyt ${}^\tau\mathcal{E}_T = {}^\tau\mathcal{E}_{\tau_n}{}^{\tau_n}\mathcal{E}_T$ ja kun n lähestyy ääretöntä saadaan raja-arvoiksi ${}^\tau\mathcal{E}_{\tau_n} = \mathcal{E}(N_{\tau_n} - N_\tau) \to 1$ ja ${}^{\tau_n}\mathcal{E}_T = \mathcal{E}(N_T - N_{\tau_n}) \to {}^\tau\mathcal{E}_T$. Soveltamalla Fatoun lemmaa saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|{}^\tau\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_\sigma] &\leq \liminf \mathbb{E}[|{}^{\tau_n}\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_\sigma] \\ &\leq C \liminf |{}^{\tau_n}\mathcal{E}_\sigma|^q \\ &= C|{}^\tau\mathcal{E}_\sigma|^q.\end{aligned}$$

□

Määritelmä IV.9. Määritellään T_n olemaan kasvava jono pysätysthetkiä, jolle $T_0 = 0$ ja $T_{n+1} = \inf\{t > T_n|{}^{T_n}\mathcal{E}_t = 0\} \wedge T$.

Nämä pysäytyshetket muodostavat välin $[0, T]$ jaon, jolla jokaisella välillä $[T_n, T_{n+1})$ prosessi ${}^{T_n}\mathcal{E} \neq 0$. Tälle prosessille on voimassa

$${}^{T_n}\mathcal{E}_t = 1, \quad kun\, t \leq T_n,$$

$${}^{T_n}\mathcal{E}_t = \mathcal{E}(N_t - N_{T_n}), \quad kun\, T_n < t \leq T_{n+1} \quad ja$$

$${}^{T_n}\mathcal{E}_t = 0, \quad kun\, t > T_{n+1}.$$

Siinä tapauksessa, että prosessi ${}^0\mathcal{E}$ on positiivinen martingaali $T_0 = 0$ ja $T_n = T$ kaikilla $n \geq 1$. Kutsutaan tätä klassilliseksi tapaukseksi.

Lemma IV.10. *Kaikilla n on voimassa*

$${}^{T_n}\mathcal{E} = {}^{T_n}\mathcal{E}^{T_{n+1}}$$

ja prosessista $({}^s\mathcal{E}_t)_{s,t\geq 0}$ on olemassa oikealta jatkuva versio.

Todistus. Ensimmäinen väittämä seuraa lemmasta (IV.6) valitsemalla pysäytyshetkiksi $\sigma = T_n$ ja $\tau = T_{n+1}$.

Toisen väittämän todistamiseksi havaitaa ensin, että prosessi ${}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau}$ voidaan kirjoittaa seuraavassa muodossa

$$^{\sigma}\mathcal{E}\tau = I_{\{\sigma=\tau=T\}} + I_{\{\sigma>\tau\}} + \sum_k I_{\{T_k\leq\sigma<T_{k+1},\sigma\leq\tau\}}{}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau}.$$

Koska joukossa $\{T_k \leq \sigma < T_{k+1}, \sigma \leq \tau\}$ voidaan kirjoittaa ${}^{T_k}\mathcal{E} = {}^{T_k}\mathcal{E}_T{}^{T}\mathcal{E}$, ${}^{T_k}\mathcal{E} = {}^{T_k}\mathcal{E}_{\sigma}{}^{\sigma}\mathcal{E}$ ja ${}^{\sigma}\mathcal{E} = {}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau}{}^{\tau}\mathcal{E}$, saadaan ${}^{\sigma}\mathcal{E}_{\tau} = {}^{T_k}\mathcal{E}_{\tau}/{}^{T_k}\mathcal{E}_{\sigma}$. Joten

$$^{\sigma}\mathcal{E}\tau = I_{\{\sigma=\tau=T\}} + I_{\{\sigma>\tau\}} + \sum_k I_{\{T_k\leq\sigma<T_{k+1},\sigma\leq\tau\}}\frac{{}^{T_k}\mathcal{E}_{\tau}}{{}^{T_k}\mathcal{E}_{\sigma}},$$

ja prosessista $({}^{s}\mathcal{E}_t)_{s,t\geq 0}$ on siten olemassa oikealta jatkuva versio. □

Määritelmä IV.11. Stokastinen prosessi $\mathcal{E}$ on säännöllinen, jos ${}^{T_n}\mathcal{E}$ on martingaali kaikilla n.

Lause IV.12. *Oletetaan, että $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_p)-epäyhtälön jollain $p > 1$. Silloin on voimassa:*

i. *Jos $\mathcal{E}$ on martingaali, niin olemassa vakio C, jolla kaikilla pysäytyshetkilla τ pätee,*
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{\tau\leq t}|\mathcal{E}_t|^p|\mathcal{F}_{\tau}\Big] \leq C|\mathcal{E}_{\tau}|^p.$$

ii. *Prosessi $\mathcal{E}$ on säännöllinen, jos ja vain jos ${}^{\tau}\mathcal{E}$ on martingaali kaikilla pysäytyshetkillä τ. Tällöin $\mathbb{E}(|{}^{\tau}\mathcal{E}_T|^p) < \infty$.*

Todistus. i. Koska martingaali $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_p)-epäyhtälön, $\mathbb{E}(|\mathcal{E}_T|^p) < \infty$. Doobin ehdollisen epäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{\tau\leq t}|\mathcal{E}_t|^p|\mathcal{F}_{\tau}\Big] &\leq C\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{\tau\leq t}|\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{t\wedge\tau}|^p|\mathcal{F}_{\tau}\Big] + |\mathcal{E}_{\tau}|^p\Big)\\ &\leq C(\mathbb{E}[|\mathcal{E}_T - \mathcal{E}_{\tau}|^p|\mathcal{F}_{\tau}] + |\mathcal{E}_{\tau}|^p).\end{aligned}$$

Koska prosessi $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_p)-epäyhtälön saadaan lauseen (IV.8) johdosta
$$\mathbb{E}[|\mathcal{E}_T - \mathcal{E}_{\tau}|^p|\mathcal{F}_{\tau}] \leq C|\mathcal{E}_{\tau}|^p,$$
ja yhdistämällä tämä edeltäviin tuloksiin väite seuraa.

ii. Joukossa $A_n = \{T_n \leq \tau < T_{n+1}\}$, ${}^{T_n}\mathcal{E}_{\tau_n} \neq 0$, käänteisen Hölderin epäyhtälön perusteella prosessi ${}^{\tau}\mathcal{E}_T \in L^p$. Koska prosessi ${}^{T_n}\mathcal{E}$ on martingaali kaikilla n, saadaan $\mathbb{E}[{}^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_{\sigma}] = \mathbb{E}[{}^{T_n}\mathcal{E}_{\tau}{}^{\tau}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_{\sigma}] = {}^{T_n}\mathcal{E}_{\tau}{}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma} = {}^{T_n}\mathcal{E}_{\sigma}$. Joten on voimassa

$$I_{A_n}{}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma} = I_{A_n}\mathbb{E}[{}^{\tau}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_{\sigma}\,].$$

Koska $\bigcup_n A_n = \{\tau < T\}$, saadaan

$$ {}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma} = \mathbb{E}[{}^{\tau}\mathcal{E}_T | \mathcal{F}_{\sigma}\,]. $$

Prosessi ${}^{\tau}\mathcal{E}$ on siis martingaali ja käänteisen Hölderin epäyhtälön perusteella $\mathbb{E}(|{}^{\tau}\mathcal{E}_T|^p) < \infty$.

□

Annetaan vielä riittävä ehto (R_2)-epäyhtälölle ja säännöllisyydelle.

Lause IV.13. *Olkoon prosessi $N \in \mathcal{M}_0^2$. Jos $\langle N \rangle_T \in L^{\infty}$, niin $\mathcal{E}(N)$ on säännöllinen ja toteuttaa (R_2)-epäyhtälön.*

Todistus. Olkoon τ pysäytyshetki. Yorin lemman (IV.4) ja lemman (IV.5) perusteella

$$ ({}^{\tau}\mathcal{E}(N))^2 = {}^{\tau}\mathcal{E}(2N + [N]) = {}^{\tau}\mathcal{E}(\tilde{N})\mathcal{E}(\langle N \rangle - \langle N \rangle^{\tau}), $$

jossa prosessi $\tilde{N} = \frac{1}{1+\Delta\langle N \rangle} \cdot (2N + [N] - \langle N \rangle)$. Koska prosessi $\langle N \rangle$ on kasvava, saadaan

$$ 0 < \mathcal{E}(\langle N \rangle - \langle N \rangle^{\tau}) \leq \exp(\|\langle N \rangle_T\|_{\infty}). $$

Lokaali martingaali ${}^{\tau}\mathcal{E}(\tilde{N})$ on ei-negatiivinen, joten se on myös ei-negatiivinen ylimartingaali ja kaikilla pysäytyshetkillä σ on voimassa $0 \leq \mathbb{E}[{}^{\tau}\mathcal{E}(\tilde{N})_{\sigma} | \mathcal{F}_{\tau}] \leq {}^{\tau}\mathcal{E}(\tilde{N})_{\tau} = 1$. Nyt saadaan

$$ \mathbb{E}[({}^{\tau}\mathcal{E}(\tilde{N})_{\sigma})^2 | \mathcal{F}_{\tau}] \leq \exp(\|\langle N \rangle_T\|_{\infty}). $$

Joten kokoelma ${}^{\tau}\mathcal{E}(N)_{\sigma}$ on tasaisesti integroituva ja prosessi $\mathcal{E}(N)$ toteuttaa (R_2)-epäyhtälön. □

Johdatus $\mathcal{E}$-martingaaleihin

Määritellään seuraavaksi uusi luokka stokastisia prosesseja, $\mathcal{E}(N)$-martingaalit tai $\mathcal{E}$-martingaalit, jota tullaan tarvitsemaan myöhemmin Föllmerin ja Schweizerin hajotelman todistamiseksi. Tätä prosessien luokkaa tarkastelivat ensimmäisinä T. Choulli, L. Krawczyk ja C. Stricker [14].

Määritelmä IV.14. Stokastinen prosessi X, jolla on D-polut, on $\mathcal{E}(N)$-martin gaali, jos kaikilla n on voimassa

$$ \mathbb{E}(|X_{T_n}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|) < \infty $$

ja $({}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E})$ on martingaali. Merkitään $\mathcal{E}(N)$-martingaalien perhettä $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Vastaavasti prosessi X on $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaali, jos prosessi $({}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E})$ on lokaali martingaali.

On syytä huomata, että klassillisessa tapauksessa $\mathcal{E}$-martingaalien luokka yhtyy martingaaleihin mitan $d\mathbb{Q} = \mathcal{E}_T d\mathbb{P}$ suhteen.

Lause IV.15. *Oletetaan, että $\mathcal{E}$ on säännöllinen.*

i. Stokastinen prosessi X, jolla on D-polut ja on $\mathbb{F}$-sopiva, on $\mathcal{E}$-martingaali, jos ja vain jos kaikilla n, $\mathbb{E}(|X_{T_n}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|) < \infty$, $\mathbb{E}(|X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|) < \infty$, ja kaikilla t on voimassa

$$\mathbb{E}[X_T{}^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t \qquad \text{(IV.20)}$$

joukossa $\{t : t \in [T_n, T_{n+1}]\}$. Prosessin ollessa $\mathcal{E}$-martingaali, päätearvo X_T siis määrittää koko prosessin.

ii. Olkoon ${}^*\mathcal{E}_T := \sup_{0\leq t\leq T}|{}^t\mathcal{E}_T|$ ja H satunnaismuuttuja, jolla $H^*\mathcal{E}_T \in L^\infty$. Silloin prosessi X, $X_t := \mathbb{E}[H^t\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t]$, on $\mathcal{E}$-martingaali.

iii. Jos $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_q)-epäyhtälön ja satunnaismuuttuja $H \in L^p$, niin on olemassa $X \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, jolle $X_T = H$.

Todistus. i. Lemman (IV.10) perusteella joukossa $\{T > T_{n+1}\}$ on voimassa ${}^{T_n}\mathcal{E}_T = 0 = {}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}$. Prosessin ${}^{T_n}X$ määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} {}^{T_n}X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}} &= (X_{T_{n+1}} - X_{T_n})^{T_n T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}} \\ \Leftrightarrow ({}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E})_{T_{n+1}} &= X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}} - X_{T_n}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}. \end{aligned} \qquad \text{(IV.21)}$$

Prosessin $\mathcal{E}$ säännöllisyydestä seuraa

$$\mathbb{E}[-X^{T_n T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = -X_{T_n}\mathbb{E}[{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = -X_{T_n}{}^{T_n}\mathcal{E}_t.$$

Jos prosessi X on $\mathcal{E}$-martingaali, niin saadaan $\mathbb{E}[({}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E})_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = {}^{T_n}X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t$ ja yhtälöstä (IV.21) seuraa

$$\mathbb{E}[X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = {}^{T_n}X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t + X_{T_n}{}^{T_n}\mathcal{E}_t = X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t.$$

Jos taasen yhtälö $\mathbb{E}[X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t$ on voimassa, saadaan yhtälön (IV.21) avulla

$$\mathbb{E}[({}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E})_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = ({}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E})_t.$$

ii. Prosessista X on olemassa versio, jolla on D-polut, koska $H^*\mathcal{E}_T \in L_\infty$. Lisäksi kaikilla pysäytyshetkillä τ on voimassa $X_\tau = \mathbb{E}[H^\tau\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_\tau]$. Prosessin $\mathcal{E}$ säännöllisyydestä johtuen kaikilla n on voimassa $\mathbb{E}(|X_{T_n}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|) < \infty$ ja $\mathbb{E}(|X_{T_n}{}^{T_{n+1}}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|) < \infty$. Joukossa $\{t \in [T_n, T_{n+1}]\}$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_T{}^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_T]^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[H^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[H^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}{}^{T_{n+1}}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_{T_{n+1}}]|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[H^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_{T_{n+1}}]^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] \quad ja \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[H^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[H^t\mathcal{E}_T{}^{T_n}\mathcal{E}_t|\mathcal{F}_t] = X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t,$$

joten kohdan i. ehdot täyttyvät ja prosessi X on $\mathcal{E}$-martingaali.

iii. Asetetaan prosessiksi X seuraava

$$X_t = \frac{\mathbb{E}[H^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t]}{{}^{T_n}\mathcal{E}_t}$$

joukossa $\{t \in [T_n, T_{n+1})\}$. Tällöin prosessista X on olemassa versio, jolla on D-polut. Prosessi X toteuttaa yhtälön (IV.21) ja (R_q)-epäyhtä löstä saadaan

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(|X_{T_n}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|) = \mathbb{E}(|X_{T_n}|\mathbb{E}[|{}^{T_n}\mathcal{E}_T||\mathcal{F}_{T_n}]) \leq C\mathbb{E}|X_{T_n}|\\ &\leq C\mathbb{E}[|H^{T_n}\mathcal{E}_T||\mathcal{F}_{T_n}] \leq C\|H\|_p(\mathbb{E}[|{}^{T_n}\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_{T_n}])^{\frac{1}{q}} \leq C\|H\|_p\end{aligned}$$

ja $\mathbb{E}(|X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|) = \mathbb{E}(|H^{T_n}\mathcal{E}_T|) \leq \|H\|_p(\mathbb{E}[|{}^{T_n}\mathcal{E}_T|^q|\mathcal{F}_{T_n}])^{\frac{1}{q}} \leq C\|H\|_p$. Jälleen kohdan i. nojalla prosessi X on $\mathcal{E}$-martingaali.

□

Nyt ollaan valmiita esittämään esimerkki $\mathcal{E}$-martingaalista.

Esimerkki IV.16. *Olkoon $\mathcal{E}$ säännöllinen ja määritellään prosessi X seuraavasti, $X_t = YI_{\{T_k<T, t\geq T_k\}}$, jossa Y on rajoitettu $\mathcal{F}_{T_k}$-mitallinen satunnaismuuttuja. Lasketaan prosessin X arvot pysäytyshetkillä T_n. Saadaan $X_{T_n} = 0$, kun $n < k$, ja $X_{T_n} = YI_{\{T_k<T\}}$, kun $n \geq k$. Koska $\mathcal{E}$ on säännöllinen, ovat lauseen* (IV.15) *i. integroituvuusehdot voimassa. Tarkistetaan, että yhtälö* (IV.20) *on voimassa. Hetkellä T prosessin X arvoksi saadaan $X_T = YI_{\{T_k<T\}}$ ja, kun $n \geq k$, saadaan*

$$\mathbb{E}[X_T{}^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] = YI_{\{T_k<T\}}{}^{T_n}\mathcal{E}_t = \mathbb{E}[X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t.$$

Vastaavasti, kun $n+1 < k$, saadaan

$$\mathbb{E}[X_T{}^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] = 0 = \mathbb{E}[X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t$$

ja, kun $n+1 = k$,

$$\mathbb{E}[X_T{}^{T_n}\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t] = 0 = \mathbb{E}[X_{T_{n+1}}{}^{T_n}\mathcal{E}_{T_{n+1}}|\mathcal{F}_t] = X_t{}^{T_n}\mathcal{E}_t.$$

Prosessi X on siis $\mathcal{E}$-martingaali. Erityisesti on olemassa kasvavia $\mathcal{E}$-martingaaleja, jotka eivät ole vakioita, jos $\mathbb{P}(T_1 < T) > 0$.

Mainitaan vielä kolme tulosta semimartingaaleille.

Lause IV.17. *Prosessi X, jolla on D-polut, on $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaali, jos ja vain jos se on semimartingaali, jolla prosessi $X + [X, N]$ on lokaali martingaali.*

Todistus. Oletetaan ensin, että prosessi X on $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaali. Koska $\inf_{t\in[T_n,T_{n+1})}|{}^{T_n}\mathcal{E}_t > 0$ on prosessi $1/({}^{T_n}\mathcal{E})I_{[T_n,T_{n+1})}$ myös semimartingaali. Prosessi ${}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E}$ on oletuksen mukaan lokaali martingaali, joten myös prosessit ${}^{T_n}XI_{[T_n,T_{n+1})}$ ja $XI_{[T_n,T_{n+1})} = {}^{T_n}XI_{[T_n,T_{n+1})} + X_{T_n}I_{[T_n,T_{n+1})}$

ovat lokaaleja martingaaleja. Tästä seuraa, että prosessi $XI_{[0,T_n]}$ on semimartingaali millä tahansa n, joten prosessi X on semimartingaali.

Olkoon prosessi X mielivaltainen semimartingaali, jolla on kanoninen hajotelma $X = X_0 + M + A$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned} {}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E} &= \left({}^{T_n}X_-\right)\cdot\left({}^{T_n}\mathcal{E}\right) + \left({}^{T_n}\mathcal{E}_-\right)\cdot\left({}^{T_n}X\right) + \left[{}^{T_n}X, {}^{T_n}\mathcal{E}\right] \\ &= lokaali\ martingaali + {}^{T_n}\mathcal{E}_-\cdot\left({}^{T_n}X + \left[{}^{T_n}X, {}^{T_n}N\right]\right). \end{aligned} \tag{IV.22}$$

Jos prosessi ${}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E}$ on lokaali martingaali, niin myös prosessi $Y = {}^{T_n}\mathcal{E}_-\cdot\left({}^{T_n}X + \left[{}^{T_n}X, {}^{T_n}N\right]\right)$ on lokaali martingaali. Silloin prosessi $\left(1/{}^{T_n}\mathcal{E}_{t-}\right)I_{[0,T_{n+1}]}\cdot Y = {}^{T_n}X^{T_{n+1}} + {}^{T_n}[X,N]^{T_{n+1}}$ on lokaali martingaali. Joten prosessi

$$ {}^{0}X^{T_k} + {}^{0}[X,N]^{T_k} = \sum_{0\le n\le k} {}^{T_n}X^{T_{n+1}} + {}^{T_n}[X,N]^{T_{n+1}} $$

on lokaali martingaali kaikilla k ja siten prosessi $X + [X,N]$ on lokaali martingaali.

Jos taas oletetaan, että prosessi X on semimartingaali, jolla prosessi $X + [X,N]$ on lokaali martingaali, niin yhtälön (IV.22) perusteella prosessi ${}^{T_n}X^{T_n}\mathcal{E}$ on lokaali martingaali kaikilla n ja prosessi X on siis $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaali. □

Seuraus IV.18. *Olkoon X erityinen semimartingaali, jolla on kanoninen hajotelma $X = X_0 + M + A$. Silloin X on $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaali, jos ja vain jos $[M,N]$ on lokaalisti integroituva ja $A = -\langle M,N\rangle$.*

Todistus. Edeltävän lauseen perusteella semimartingaali X on $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaali, jos ja vain jos $X + [X,N]$ on lokaali martingaali, mikä on ekvivalenttia sen kanssa, että prosessi $A + [M,N]$ on lokaali martingaali, josta väite seuraa. □

Ja edeltävällä tuloksella on seuraus.

Seuraus IV.19. *Jos $X = X_0 + M - \langle M,N\rangle$ on erityinen semimartingaali, jolla kaikilla n on voimassa $\mathbb{E}(X_T^*({}^{T_n}\mathcal{E})_T^*) < \infty$, niin X on $\mathcal{E}$-martingaali.*

Epäyhtälöitä $\mathcal{E}$-martingaaleille

Ensimmäiseksi esitetään Doobin epäyhtälö laajennettuna $\mathcal{E}$-martingaalien tapaukseen.

Lause IV.20. *Olkoot p ja q Hölderin liittolukuja, $p,q \in (1,\infty)$, ja $\mathcal{E}$ säännöllinen. Silloin seuraavat lauseet ovat yhtäpitäviä.*

i. Prosessi $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_q)-epäyhtälön.

ii. On olemassa vakio C, jolla kaikilla $X \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ on voimassa

$$ \|X_T^*\|_p \le C\|X_T\|_p. $$

iii. On olemassa vakio C, jolla kaikilla $X \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ja millä tahansa $\lambda > 0$ on voimassa

$$\lambda^p \mathbb{P}(X_T^* > \lambda) \le C\mathbb{E}(|X_T|^p I_{\{X_T^* > \lambda\}}).$$

iv. On olemassa vakio C, jolla kaikilla rajoitetuilla $\mathcal{E}$-martingaaleilla ja kaikilla pysäytyshetkillä τ on voimassa

$$\mathbb{P}(|X_\tau| \ge 1) \le C\|X_T\|_p^p.$$

Ennen todistusta esitetään siinä tarvittava lemma.

Lemma IV.21. *Jos molemmilla positiivisilla prosesseilla A ja B on D-polut, prosessi A on kasvava sekä $\mathbb{F}$-sopiva ja satunnaismuuttujalla U on voimassa millä tahansa $s \in [0, T]$*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t \ge s} B_t | \mathcal{F}_s\Big] \le \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_s],$$

niin

$$\mathbb{E}\Big(\sup_t (A_t B_t)\Big) \le \mathbb{E}(A_T U).$$

Todistus. [14] Lemma 4.2 □

Todistus. [14] Th. 4.1 Todistetaan ensimmäiseksi implikaatio i. $\Rightarrow$ ii. . Oletetaan, että $\mathbb{E}(|X_T|^p) < \infty$. Jos näin ei olisi, kohdan ii. epäyhtälö olisi triviaalisti voimassa. Kiinnitetään n ja määritellään prosessi $Z_t = {}^{T_n}\mathcal{E}_t$. Koska oletuksen mukaan $\mathcal{E}$ on säännöllinen, on prosessi Z martingaali ja lemman (IV.10) nojalla $Z_{T_{n+1}} = Z_T$. Määritellään mitan $\mathbb{P}$ kanssa absoluuttisesti jatkuva mitta $\mathbb{Q}$ seuraavasti

$$d\mathbb{Q} = |Z_T|^q d\mathbb{P},$$

joka on (R_q)-epäyhtälön perusteella äärellinen. Olkoon

$$Y_T = I_{\{T_n < T\}} \frac{X_{T_{n+1}}}{|Z_T|^{q-1}} sign(Z_T) I_{\{Z_T \ne 0\}}.$$

Havaitaan, että epäyhtälö

$$\mathbb{E}(|Y_T|^p |Z_T|^q) \le \mathbb{E}(|X_T|^p) < \infty$$

on voimassa, joten satunnaismuuttuja Y_T kuuluu avaruuteen $L^p(\mathbb{Q})$. Olkoon

$$Y_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_T|\mathcal{F}_t].$$

Tällä tavoin määritelty prosessi Y on $\mathbb{Q}$-martingaali, joten kaikille joukoille $A \in \mathcal{F}_t$ pätee

$$\begin{aligned}\int_A Y_T |Z_T|^q d\mathbb{P} &= \int_A Y_t |Z_T|^q d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[Y_t |Z_T|^q | \mathcal{F}_t] d\mathbb{P} \\ &= \int_A Y_t \mathbb{E}[|Z_T|^q | \mathcal{F}_t] d\mathbb{P},\end{aligned}$$

joten prosessi

$$N_t = Y_t \mathbb{E}[|Z_T|^q|\mathcal{F}_t] \tag{IV.23}$$

on martingaali ja

$$N_T = I_{\{T_n<T\}} X_{T_{n+1}} Z_T.$$

Koska oletuksen mukaan prosessi X on $\mathcal{E}$-martingaali, saadaan lauseesta (IV.15)

$$\mathbb{E}[X_{T_{n+1}} Z_T|\mathcal{F}_t] = X_t Z_t$$

joukossa $\{t \in [T_n, T_{n+1}]\}$. Tässä joukossa prosessille N pätee

$$N_t = I_{\{T_n<T\}} X_t Z_t. \tag{IV.24}$$

Pysäytyshetken T_{n+1} määritelmän mukaan prosessi $Z_t \neq 0$, kun $t < T_{n+1}$, jolloin (R^q)-epäyhtälö sekä kohdat (IV.23) ja (IV.24) antavat ajanhetkille $t \in [T_n, T_{n+1})$

$$\begin{aligned} |X_t| &= \left|\frac{N_t}{Z_t}\right| = \left|\frac{Y_t \mathbb{E}[|Z_T|^q|\mathcal{F}_t]}{Z_t}\right| \\ &\leq C|Y_t||Z_t|^{q-1}. \end{aligned}$$

Joten saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[T_n,T_{n+1})} |X_t|^p\Big) &\leq C\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[T_n,T_{n+1})} \big(|Y_t||Z_t|^{q-1}\big)^p\Big) \\ &\leq C\mathbb{E}\Big(\sup_t |Y_t|^p|Z_t|^q\Big) \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Koska prosessi Z on martingaali, Doobin epäyhtälön perusteella kaikilla ajanhetkillä s on voimassa

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\geq s} |Z_t|^q|\mathcal{F}_s\Big] \leq C\mathbb{E}\Big[|Z_T|^q|\mathcal{F}_s\Big].$$

Nyt lemmasta (IV.21) seuraa prosesseille $A = (Y^*)^p$, $B = |Z|^q$ ja $U = C|Z_T|^q$

$$\mathbb{E}\Big(\sup_t |Y_t|^p|Z_t|^q\Big) \leq C\mathbb{E}\Big((Y_T^*)^p|Z_T|^q\Big). \tag{IV.26}$$

Koska prosessi Y on $\mathbb{Q}$-martingaali ja prosessi $Z_T = 0$ joukossa $\{T_{n+1} < T\}$, saadaan Doobin epäyhtälöstä mitan $\mathbb{Q}$ alla

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((Y_T^*)^p|Z_T|^q) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((Y_T^*)^p) \leq C\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(|Y_T|^p) = C\mathbb{E}(|X_{T_{n+1}}|^p I_{\{T_n<T,|Z_T|>0\}}) \\ &= \mathbb{E}(|X_{T_{n+1}}|^p I_{\{T_n<T,T_{n+1}=T\}}) = C\mathbb{E}(|X_T|^p I_{\{T_n<T,T_{n+1}=T\}}). \end{aligned} \tag{IV.27}$$

Yhdistämällä (IV.25), (IV.26) ja (IV.27), saadaan

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[T_n,T_{n+1})} |X_t|^p\Big) \leq C\mathbb{E}\Big(|X_T|^p I_{\{T_n<T,T_{n+1}=T\}}\Big).$$

Viimein joukkojen $\{T_n < T, T_{n+1} = T\}$ erillisyydestä seuraa

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^p\Big) &\leq \mathbb{E}\bigg(\sum_n \sup_{t\in[T_n,T_{n+1})}|X_t|^p\bigg) + \mathbb{E}(|X_T|^p)\\ &\leq C\sum_n \mathbb{E}(|X_T|^p I_{\{T_n<T,T_{n+1}=T\}}) + \mathbb{E}(|X_T|^p)\\ &\leq C\mathbb{E}(|X_T|^p).\end{aligned}$$

Implikaatio ii. $\Rightarrow$ iv. on selvä.

Tarkastellaan seuraavaksi implikaatiota iv. $\Rightarrow$ i. . Kiinnitetään luvut α ja β, $0 < \alpha < \beta$. Olkoon τ pysäytyshetki, joukko $A' \in \mathcal{F}_\tau$ ja ${}^*\mathcal{E}_T = \sup_{0\leq t\leq T}|{}^t\mathcal{E}_T|$. Määritellään joukot A ja A'' sekä prosessit H ja X seuraavasti

$$A'' = \{\mathbb{E}[|{}^\tau\mathcal{E}_T|^q I_{\{{}^*\mathcal{E}_T\leq\beta\}}|\mathcal{F}_\tau] \geq \alpha\}, \quad A = A'\cap A'',$$

$$H = I_A I_{\{{}^*\mathcal{E}_T\leq\beta\}}\frac{|{}^\tau\mathcal{E}_T|^{q-1}sign({}^\tau\mathcal{E}_T)}{\mathbb{E}[|\,{}^\tau\mathcal{E}_T|^q I_{\{{}^*\mathcal{E}_T\leq\beta\}}|\mathcal{F}_\tau]}, \quad X_t = \mathbb{E}[H{}^t\mathcal{E}_T|\mathcal{F}_t].$$

Lauseen (IV.15) mukaan prosessi X on rajoitettu $\mathcal{E}$-martingaali. Koska $X_\tau = I_A$ saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(|X_\tau| \geq 1) \leq C\mathbb{E}(|X_T|^p)\\ &= C\mathbb{E}\bigg(I_A\frac{1}{(\mathbb{E}[|{}^\tau\mathcal{E}_T|^q I_{\{{}^*\mathcal{E}_T\leq\beta\}}|\mathcal{F}_\tau])^{p-1}}\bigg).\end{aligned}$$

Jonka perusteella täytyy olla voimassa

$$I_{A''}\mathbb{E}[|\,{}^\tau\mathcal{E}_T|^q I_{\{{}^*\mathcal{E}_T\leq\beta\}}|\mathcal{F}_\tau| \leq C.$$

Koska α ja β ovat mielivaltaisia, väite seuraa.

Nyt on siis saatu i. $\Leftrightarrow$ ii. $\Leftrightarrow$ iv. .

Kohdasta iii. seuraa selvästi kohta iv. ja seuraavaksi tarkastellaan implikaatiota ii. $\Rightarrow$ iii. .

Oletetaan, että satunnaismuuttuja $X_T I_{\{X_T^*>\lambda\}}$ kuuluu avaruuteen L^p. Asetetaan $\tau_\lambda = \inf\{t|\,|X_t| > \lambda\}$. Lauseen (IV.15) perusteella on olemassa prosessi $Y \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, jolla $Y_T = X_T I_{\{X_T^*>\lambda\}}$ ja $Y_{\tau_\lambda} = X_{\tau_\lambda}$ joukossa $\{X_T^* > \lambda\}$. Soveltamalla kohtaa ii. prosessiin Y saadaan

$$\mathbb{E}(|X_{\tau_\lambda}|^p I_{\{X_T^*>\lambda\}}) \leq C\mathbb{E}(|X_T|^p I_{\{X_T^*>\lambda\}}).$$

Koska $\lambda^{-1}|X_{\tau_\lambda}| \geq 1$ joukossa $\{X_T^* > \lambda\}$ saadaan

$$\lambda^p\mathbb{P}(X_T^* > \lambda) \leq C\mathbb{E}(|X_T|^p I_{\{X_T^*>\lambda\}}).$$

Joten ii. $\Rightarrow$ iii. ja lauseen kaikki kohdat ovat ekvivalentteja. $\square$

Ennen lausetta, joka laajentaa Burkholderin, Davisin ja Gundyn epäyhtälöt koskemaan $\mathcal{E}$-martingaaleja, käydään läpi muutamia avaruuden bmo_p[2] ominaisuuksia.

[2] bmo tulee sanoista bounded mean oscillation

Määritelmä IV.22. i. Olkoon prosessi M martingaali ja $p \in (1, \infty)$. Tällöin M kuuluu avaruuteen bmo_p, jos on olemassa vakio C, jolla on voimassa

$$\mathbb{E}[|M_T - M_\tau|^p|\mathcal{F}_\tau] \leq C^p \tag{IV.28}$$

kaikilla pysäytyshetkillä τ. Parasta mahdollista vakiota tässä yhtälössä merkitään $\|M\|_{bmo_p}$. Jatkuvien martingaalien muodostamasta avaruuden bmo_2 aliavaruudesta käytetään merkintää BMO.

ii. Olkoon prosessi V kasvava ja integroituva. Prosessin V sanotaan generoivan rajoitetun potentiaalin, jos on olemassa vakio C, jolla on voimassa kaikilla $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}[V_T - V_t|\mathcal{F}_t] \leq C.$$

Huomautus. Jos prosessi M on rajoitettu martingaali, niin $M \in bmo_2$, ja kaikki prosessit $M \in bmo_2$ ovat lokaalisti rajoitettuja martingaaleja. [37] Th. 10.9 ja 10.11

Nämä avaruudet perustuvat F. Johnin ja L. Nirenbergin tutkimiin BMO-funktioden avaruuksiin[44] ja ovat niiden vastineita todennäköisyysteoreettisissa asetelmissa. Jatkuville martingaaleille näiden avaruuksien teoriaa käsittelee N. Kazamaki [45] ja yleisempää teoriaa He, Wang ja Yan [37].

Lokaalisti martingaaleille prosesseille ja $\mathcal{E}$-martingaaleille ovat voimassa vastaavasti seuraavat tulokset, joista ensimmäinen seuraa Burkholder-Davis-Gundy -epäyhtälöistä.

Lause IV.23. *Olkoon prosessi N lokaali martingaali. Silloin N kuuluu avaruuteen bmo_p, jos ja vain jos on olemassa vakio C, jolla prosessille N on voimassa*

$$\mathbb{E}[([N]_T - [N]_\tau)^{p/2}|\mathcal{F}_\tau] \leq C^p$$

kaikilla pysäytyshetkillä τ.

Lause IV.24. *Jos prosessi $\mathcal{E}(N)$ on säännöllinen ja toteuttaa (R_q)-epäyhtälön jollain $q > 1$, niin prosessi N kuuluu avaruuteen bmo_q.*

Todistus. [14] Prop. 3.10 □

Seuraava epäyhtälö on versio kuuluisista Burkholder-Davis-Gundy -epäyhtälöistä $\mathcal{E}$-martingaalien tapauksessa.

Lause IV.25. *Olkoot p ja q Hölderin liittolukuja, $p, q \in (1, \infty)$, ja prosessi $N \in \mathcal{M}^q_{loc}$. Tällöin seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä.*

i. $\tilde{N} = \frac{1}{1+^P(|\Delta N|^q I_{\{|\Delta N|>1\}})^{1/q}} \cdot N \in bmo_q$

ii. On olemassa vakio C, jolla kaikille $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaaleille prosesseille X on voimassa

$$C^{-1}\mathbb{E}([X]_T^{p/2}) \leq \mathbb{E}((X_T^*)^p) \leq C\mathbb{E}([X]_T^{p/2}).$$

Tämän lauseen todistamiseksi tarvitaan vielä joitakin aputuloksia. Kerrataan ensimmäiseksi avaruudeen $\mathcal{H}^p$ määritelmä.

Määritelmä IV.26. Olkoon $p \in [1, \infty)$ ja prosessi X erityinen semimartingaali, jolla on kanoninen hajotelma $X = X_0 + M + A$. Määritellään

$$|||X|||_p = \|X_0\|_p + \left\|[M]_T^{1/2}\right\|_p + \left\|\int_0^T |dA_s|\right\|_p$$

ja

$$\mathcal{H}^p = \{X : |||X|||_p < \infty\}.$$

Kutsutaan avaruuden $\mathcal{H}^p$ suljettua aliavaruutta $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}^p$ martingaalien Hardyn avaruudeksi $\mathcal{H}^p$.

Avaruudessa $\mathcal{H}^p$ ovat voimassa seuraavat epäyhtälöt.

Lause IV.27. *Kaikilla erityisillä semimartingaaleilla X on voimassa*

i. $\|[X]_T^{1/2}\|_p \leq |||X|||_p$ *ja*

ii. $\|X_T^*\|_p \leq C|||X|||_p$.

Todistus. [60] Ch. V.2

□

Lause IV.28. *Olkoon q positiivinen reaaliluku ja prosessi Y semimartingaali. Silloin seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä.*

i. *On olemassa vakio C_1, jolla on voimassa kaikilla ajanhetkillä t*

$$\mathbb{E}\left[\left([Y]_T - [Y]_t\right)^{q/2} | \mathcal{F}_t\right] \leq C_1^q. \tag{IV.29}$$

ii. *On olemassa vakio C_2, jolla kaikilla $\mathbb{F}$-sopivilla, rajoitetuilla prosesseilla Z, joilla on D-polut, on voimassa*

$$\left\|[Z_- \cdot Y]_T^{1/2}\right\|_q \leq C_2 \left\|Z_T^*\right\|_q. \tag{IV.30}$$

Jos lisäksi $q > 1$ ja p on sen konjugaatti, niin edeltävät ehdot ovat ekvivalentteja seuraavien väittämien kanssa.

iii. *On olemassa vakio C_3, jolla on voimassa kaikilla $M \in \mathcal{M}^q$*

$$\left\|[M_- \cdot Y]_T^{1/2}\right\|_q \leq C_3 \left\|M_T\right\|_q. \tag{IV.31}$$

iv. *On olemassa vakio C_4, jolla on voimassa kaikilla semimartingaaleilla X*

$$\left\|\int_0^T |d\langle X, Y\rangle|\right\|_p \leq C_4 \left\|[X]_T^{1/2}\right\|_p. \tag{IV.32}$$

Todistusta varten tarvitaan seuraavat apulauseet.

Lemma IV.29. *Jos diskreettiaikainen prosessi* $(B_n)_{0\le n\le N}$ *on kasvava ja* $\mathbb{F}$*-sopiva,* $B_0 = 0$ *ja* V *on ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, jolla on voimassa kaikilla* $n \ge 1$

$$\mathbb{E}[B_N - B_{n-1}|\mathcal{F}_n] \le \mathbb{E}[V|\mathcal{F}_n],$$

niin kaikilla $a \ge 1$ *on olemassa vakio* K*, jolla*

$$\|B_N\|_a \le K\|V\|_a.$$

Todistus. [35] Lemma III 5.1 □

Lemma IV.30. *Olkoot* A *ja* h *ei-negatiivisia, kasvavia ja* $\mathbb{F}$*-sopivia prosesseja, joilla on* D*-polut, ja olkoon* a *positiivinen reaaliluku. Jos tällöin on olemassa vakio* C*, jolla on voimassa kaikilla ajanhetkillä* $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}[(A_T - A_t)^a|\mathcal{F}_t] \le C, \tag{IV.33}$$

niin on olemassa vakio K*, joka riippuu vain luvusta* a*, jolla pätee*

$$\mathbb{E}\big((h_- \cdot A)_T^a\big) \le KC\mathbb{E}(h_T^a).$$

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $a \le 1$. Oletetaan, että prosessille h on voimassa $h_0 > 0$, ja määritellään jono pysäytyshetkiä

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k \mid h_t \ge 2^{1/a} h_{\tau_k}\}.$$

Koska on voimassa $(x+y)^a \le x^a + y^a$, t yhtälössä (IV.33) voidaan korvata millä tahansa pysäytyshetkellä ja mille tahansa jonolle positiivisia reaalilukuja, joilla $x_{n+1} \ge 2^{1/a} x_n$, pätee

$$x_1^a + x_2^a + \cdots + x_i^a \le x_i^a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots) = 2x_i^a,$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T h_{t-} dA_t\right)^a\right) &\le \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} h_{t-} dA_t\right)^a\right) \\
&\le \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2\big(h_{\tau_k}(A_{\tau_{k+1}} - A_{\tau_k})\big)^a\right) \\
&= 2\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_{\tau_k}^a \mathbb{E}[(A_{\tau_{k+1}} - A_{\tau_k})^a|\mathcal{F}_{\tau_k}]\right) \\
&\le 2C\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_{\tau_k}^a I_{\{\tau_k < T\}}\right) \le 4C\mathbb{E}(h_T^a).
\end{aligned}$$

Jos $\mathbb{P}(h_0 > 0) > 0$, niin tehdään edeltävä arviointi ylöspäin prosessille $h+\epsilon$ ja annetaan ϵ lähestyä nollaa.

Tapauksessa $a \geq 1$ on riittävää todistaa väite diskreetissä ajassa $n = 0, 1, \ldots, N$. Olkoon prosessi $B = h_- \cdot A$. Ehdolliselle odotusarvolle saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_N - B_{n-1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[h_{n-1}\Delta A_n + h_n(A_T - A_n) + \Delta h_{n+1}(A_T - A_{n+1}) + \cdots |\mathcal{F}_n] \\ &= h_{n-1}\Delta A_n + \mathbb{E}[h_n\mathbb{E}[(A_T - A_n)|\mathcal{F}_n] \\ &+ \Delta h_{n+1}\mathbb{E}[(A_T - A_{n+1})|\mathcal{F}_{n+1}] + \cdots |\mathcal{F}_n] \\ &\leq h_{n-1}\Delta A_n + C^{1/a}\mathbb{E}[h_n + \Delta h_{n+1} + \cdots |\mathcal{F}_n] \\ &\leq \mathbb{E}[\sup_k(h_k\Delta A_{k+1}) + C^{1/a}h_N|\mathcal{F}_n].\end{aligned}$$

Nyt lemman (IV.29) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_N^a) &\leq K\mathbb{E}((\sup_k h_k\Delta A_{k+1} + C^{1/a}h_N)^a) \\ &\leq K\big(\mathbb{E}(\sup_k(h_k^a(\Delta A_{k+1})^a)) + C\mathbb{E}(h_N^a)\big).\end{aligned}$$

Koska toisaalta $\mathbb{E}[\sup_{n\geq k}(\Delta A_{n+1})^a|\mathcal{F}_k] \leq \mathbb{E}[(A_N - A_k)^a|\mathcal{F}_k] \leq C$, antaa lemma (IV.21)

$$\mathbb{E}(\sup_k(h_k\Delta A_{k+1})^a) \leq C\mathbb{E}(h_N^a).$$

□

Nyt voidaan siirtyä lauseen (IV.28) todistukseen.

Todistus. Implikaatio ii. ⇒ i. seuraa välittömästi valittaessa mielivaltainen ajanhetki t, joukko $A \in \mathcal{F}_t$ ja prosessiksi $Z = I_A I_{\{t\leq s\leq T\}}$.

Implikaatio i. ⇒ ii. seuraa nyt yksinkertaisesti valitsemalla $h_t = Z_t^{*2}$, $A_t = [Y]_t$ ja $a = q/2$ sekä soveltamalla lemmaa (IV.30).

Implikaatio ii. ⇒ iii. saadaan Doobin epäyhtälöstä.

Tarkastellaan seuraavaksi implikaatiota iii. ⇒ iv. . Voidaan olettaa, että on voimassa $\|[X]_T^{1/2}\|_p < \infty$ ja prosessi $\langle X, Y\rangle$ on kasvava (muutoin dX kerrotaan differentiaalin $d\langle X, Y\rangle$ merkillä). Nyt mille tahansa martingaalille $M \in \mathcal{M}^\infty$ saadaan Kunitan ja Watanaben epäyhtälöllä

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^T |d[X, M_- \cdot Y]|\right) &\leq \left\|[M_- \cdot Y]_T^{1/2}\right\|_q \left\|[X]_T^{1/2}\right\|_p \\ &\leq C_3\left\|[X]_T^{1/2}\right\|_p \|M_t\|_q,\end{aligned}$$

joten prosessi $[X, M_- \cdot Y]$ on integroituva ja

$$\mathbb{E}(M_T\langle X, Y\rangle_T) = \mathbb{E}(\langle X, M_- \cdot Y\rangle_T)$$

$$= \mathbb{E}([X, M_- \cdot Y]_T) \leq C_3\|[X]_T^{1/2}\|_p\|M_T\|_q.$$

Koska martingaali M on mielivaltainen, väite seuraa.

Enää on jäljellä implikaation iv. ⇒ ii. todeksi osoittaminen. Taas diskreettiaikainen tarkastelu on riittävä. Olkoon a_n $\mathbb{F}$-sopiva jono ja merkitään kaikilla $r \in (1, \infty)$

$$\|a_n\|_{h_r} = \left\|\left(\sum a_n^2\right)\right\|_r.$$

$\mathbb{F}$-sopivan jonon a_n sanotaan kuuluvan avaruuteen h_r, jos $\|a_n\|_{h_r} < \infty$. Avaruuden h_p duaali on isomorfinen avaruuden h_q kanssa [50] (Lemma 2.2.3). Olkoon nyt X mielivaltainen avaruuden h_p alkio ja määritellään $A = Z_- \cdot Y$. Voidaan olettaa, että $[A, X] \geq 0$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}([A, X]_N) &= \mathbb{E}((Z_- \cdot [Y, X])_N) \\ &= \mathbb{E}((Z_- \cdot \langle Y, X \rangle)_N) \\ &\leq \|Z_N^*\|_q \|\langle Y, X \rangle_N\|_p \leq C_4 \|Z_N^*\|_q \|X\|_{h_p}.\end{aligned}$$

Koska X on mielivaltainen, pätee

$$\|A\|_{h_q} \leq C_4 \|Z_N^*\|_q,$$

ja lause on todistettu. □

Lemma IV.31. *Olkoon prosessi X erityinen semimartingaali ja $1 \leq p < \infty$. On olemassa vakio C, jolla pätee*

i. $\|[M]_T^{1/2}\|_p \leq C \|[X]_T^{1/2}\|_p$ *ja*

ii. $\|[A]_T^{1/2}\|_p \leq C \|[X]_T^{1/2}\|_p$.

Todistus. [68] □

Lemma IV.32. *Olkoon $(f_n)_{1 \leq n \leq N}$ $\mathbb{F}$-sopiva prosessi ja $1 \leq r \leq s \leq \infty$. Määritellään*

$$\|(f_n)_{1 \leq n \leq N}\|_{\mathcal{L}^r(l_N^s)} = \left\{ \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|^s \right)^{r/s} \right] \right\}^{1/r}, \quad jos\ s < \infty,\ ja$$

$$\|(f_n)_{1 \leq n \leq N}\|_{\mathcal{L}^r(l_N^\infty)} = \left\| \sup_{0 \leq n \leq N} |f_n| \right\|_{\mathcal{L}^r}.$$

Olkoon $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ kasvava historia ja asetetaan prosessiksi $g_n = \mathbb{E}[f_n | \mathcal{F}_{n-1}]$. Tällöin on voimassa

$$\|(g_n)_{1 \leq n \leq N}\|_{\mathcal{L}^r(l_N^s)} \leq 2 \|(f_n)_{1 \leq n \leq N}\|_{\mathcal{L}^r(l_N^s)}.$$

Todistus. [20] Lemma 1 □

Lemma IV.33. *Olkoon V kasvava ennustettava prosessi ja $\alpha > 0$. Jos on olemassa vakio C, jolla on voimassa kaikilla $0 \leq t \leq T$*

$$\mathbb{E}[(V_T - V_t)^\alpha | \mathcal{F}_t] \leq C,$$

niin kaikilla $p > 0$ on olemassa vakio C, jolla kaikilla $0 \leq t \leq T$ pätee

$$\mathbb{E}[(V_T - V_t)^p | \mathcal{F}_t] \leq C.$$

Todistus. [12] Lemma 1 □

Lemma IV.34. *Olkoot* $1 \leq q < \infty$, $N \in \mathcal{M}^q_{0,loc}$ *ja* $D = {}^P(|\Delta N|^q)$ *sellaisia, joilla prosessi*
$$\hat{N} = \frac{1}{1 + D^{1/q}} \cdot N$$
kuuluu avaruuteen bmo_q. *Merkitään* $N' = \sum I_{\{D \geq 1\}}$, *joka on kasvava ja ennustettava prosessi. Tällöin kaikilla reaaliluvuilla* $a > 0$ *on olemassa vakio* C, *jolla on voimassa kaikilla ajanhetkillä* $t \in [0, T]$
$$\mathbb{E}[(N'_T - N'_t)^a | \mathcal{F}_t] \leq C.$$

Todistus. Joukkko $\{|\Delta N| > 0\}$ on ohut, joten lauseen (II.40) mukaan myös joukko $\{D > 0\}$ on ohut. Tällöin on olemassa jono (T_n) ennustettavia hetkiä, joilla $[T_i] \cap [T_j] = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, ja $\cup_n [T_n] = \{D > 0\}$. Havaitaan myös, että
$$I_{\{D \geq 1\}} \leq \frac{2D}{1 + D}. \tag{IV.34}$$

Tarkastellaan ensin tapausta $1 \leq q < 2$. Lemman (IV.32) ehdollisesta muodosta saadaan arvoilla $s = q/2 \geq r = 1$
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\sum_{t < s \leq T} \left(\frac{D_s}{1 + D_s}\right)^{2/q}\right)^{q/2} | \mathcal{F}_t\right) \\
&\leq C\mathbb{E}\left(\left(\sum_{t < s \leq T} \frac{(\Delta N)^2_s}{(1 + D_s^{1/q})^2}\right)^{q/2} | \mathcal{F}_t\right) \\
&\leq C\mathbb{E}[([\hat{N}]_T - [\hat{N}]_t)^{q/2} | \mathcal{F}_t] \leq C \|\hat{N}\|^q_{bmo_q}.
\end{aligned}$$
Nyt lemman (IV.33) perusteella prosessi
$$V''_t = \sum_{0 < s \leq t} \left(\frac{D_s}{1 + D_s}\right)^{2/q}$$
generoi rajoitetun potentiaalin. Koska pätee
$$\frac{D}{1 + D} I_{\{D \geq 1\}} \leq 2^{2/q - 1} \left(\frac{D}{1 + D}\right)^{2/q},$$
niin myös prosessi
$$V' = \sum \frac{D}{1 + D} I_{\{D \geq 1\}}$$
on hyvin määritelty ja generoi rajoitetun potentiaalin.

Siirrytään tapaukseen $q \geq 2$. Mille tahansa äärelliselle jonolle (x_i) ei-negatiivisia reaalilukuja on voimassa $(\sum_i x_i)^{q/2} \leq \sum_i x_i^{q/2}$. Täten prosessi
$$V = \sum \frac{|\Delta N|^q}{1 + D} I_{\{D \geq 1\}}$$
on hyvin määritelty ja kaikilla ajanhetkillä $t \in [0, T]$ on voimassa
$$V_T - V_t \leq ([\hat{N}]_T - [\hat{N}_t])^{q/2}.$$

Siis molemmat prosessit V ja $V^{'}$ generoivat rajoitetun potentiaalin.

Nyt yhtälön (IV.34) perusteella myös prosessi $N^{'}$ generoi rajoitetun potentiaalin kaikilla $q \geq 1$. Lauseesta (IV.33) seuraa, että kaikilla reaaliluvuilla $a > 0$ on olemassa vakio C, jolla on voimassa kaikilla ajanhetkillä $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}[(N^{'}_T - N^{'}_t)^a | \mathcal{F}_t] \leq C.$$

□

Lause IV.35. *Olkoot* $1 < p < \infty$ *ja* q *Hölderin liittolukuja ja prosessi* $N \in \mathcal{M}^q_{0,loc}$*. Silloin seuraavat lauseet ovat ekvivalentteja.*

i.

$$\hat{N} = \frac{1}{1 + {}^{P}(|\Delta N|^q I_{\{\Delta N > 1\}})^{1/q}} \cdot N \in bmo_q.$$

ii. On olemassa vakio C*, jolla on voimassa kaikilla prosesseilla* $J \in \mathcal{M}^p_0$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T |d\langle J, N\rangle_s| \right)^p \right)$$

$$\leq C \left\{ \mathbb{E}([J]^{p/2}_T) + \mathbb{E}\left(\sum (\Delta \langle J, N\rangle)^2 \right)^{p/2} \right\}. \tag{IV.35}$$

iii. On olemassa vakio C*, jolla on voimassa kaikilla* $\mathcal{E}$*-lokaalisti martingaaleilla* X

$$|||X|||_p \leq C \left\| [X]^{1/2}_T \right\|_p. \tag{IV.36}$$

iv. On olemassa vakio C*, jolla on voimassa kaikilla* $\mathcal{E}$*-lokaalisti martingaaleilla* X

$$\|X_T\|_p \leq C \left\| [X]^{1/2}_T \right\|_p. \tag{IV.37}$$

v. On olemassa vakio C*, jolla on voimassa kaikilla* $\mathcal{E}$*-lokaalisti martingaaleilla* X

$$|||X|||_p \leq C \|X^*_T\|_p. \tag{IV.38}$$

Tämän lauseen todistamiseksi tarvitaan vielä muutamia aputuloksia.

Lemma IV.36. *Olkoon* B *äärellisesti heilahteleva ennustettava prosessi, jolla on* D*-polut, ja* $B_0 = 0$*. Tällöin millä tahansa kiinteällä luvulla* $\eta > 0$ *on olemassa ennustettava prosessi* ϵ*, joka saa arvonsa joukossa* $\{-1, 1\}$*, jolla*

$$\sup_t |(\epsilon \cdot B)_t| \leq \sup_t |\Delta B_t| + \eta.$$

Todistus. [14] Lemma 4.6 □

Lemma IV.37. *Jos* $1 \leq p < \infty$*, niin on olemassa vakio* C*, jolla on voimassa kaikilla erityisillä semimartingaaleilla* X

$$\left\| [X]^{1/2}_T \right\|_p \leq \|X^*_T\|^{1/2}_p |||X|||^{1/2}_p.$$

Todistus. [15] Lemma 4.9 □

Todistus. Havaitaan, että kohtia iv., v. tai vi. todistettaessa voidaan olettaa $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaalin prosessin X kuuluvan lokaalisti avaruuteen L^p, jolloin X on erityinen semimartingaali kanonisen hajotelman ollessa $X = X_0 + J - \langle J, N\rangle$, $J \in \mathcal{M}^p_{0,loc}$.

Implikaatio iv. ⇒ v. seuraa suoraan epäyhtälöstä $\|X_T\|_p \leq C|||X|||_p$.

Osoitetaan seuraavaksi implikaatio v. ⇒ iv. todeksi. Voidaan olettaa, että $X_0 = 0$, jolloin semimartingaalin X kanoninen hajotelma on $X = J - \langle J, N\rangle$. Olkoon ϵ ennustettava prosessi, joka saa arvonsa joukossa $\{-1, 1\}$, jolla $-\epsilon d\langle H, N\rangle = |d\langle J, N\rangle|$. Nyt lauseesta (IV.31) ja Burkholder-Davis-Gundy -epäyhtälöistä seuraa

$$\begin{aligned} C\|[X]_T^{1/2}\|_p &\geq \|(\epsilon\cdot X)_T\|_p + \|(\epsilon\cdot J)_T\|_p + |[J]_T^{1/2}\|_p \\ &\geq \left\|\int_0^T |d\langle J, N\rangle|\right\|_p + |[J]_T^{1/2}\|_p = |||X|||_p. \end{aligned}$$

Siirrytään kohtaan i. ⇒ ii. seuraavaksi. Olkoon prosessi $J \in \mathcal{M}_0^p$ sellainen, että prosessi $\langle J, N\rangle$ on kasvava. Seuraavaksi asetetaan prosessiksi $D = {}^P(|\Delta N|^q I_{\{|\Delta N|>1\}})$. Koska on voimassa

$$1 \leq \frac{2}{1 + D^1/q} + I_{\{D\geq 1\}},$$

saadaan

$$\begin{aligned} \langle J, N\rangle &\leq 2\Big\langle J, \frac{1}{1+D^{1/q}}\cdot N\Big\rangle + \langle J, I_{\{D\geq 1\}}\cdot N\rangle \\ &= 2\langle J, \hat{N}\rangle + \Big\langle \sum \Delta\langle J, N\rangle, \sum I_{\{D\geq 1\}}\Big\rangle. \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan prosessi $\hat{N}$ kuuluu avaruuteen bmo_q ja lauseen (IV.34) perusteella myös prosessi $\sum I_{\{D\geq 1\}}$ kuuluu tähän avaruuteen. Nyt soveltamalla lausetta (IV.28) saadaan

$$\begin{aligned} \|\langle J, N\rangle_T\|_p &= 2\|\langle J, \hat{N}\rangle_T\|_p + \Big\|\Big\langle \sum \Delta\langle J, N\rangle, \sum I_{\{D\geq 1\}}\Big\rangle\Big\|_p \\ &\leq C\bigg(\Big\|[J]_T^{1/2}\Big\|_p + \Big\|\Big(\sum(\Delta\langle J, N\rangle)^2\Big)^{1/2}\Big\|_p\bigg). \end{aligned}$$

Nyt todistetaan implikaatio ii. ⇒ iv. . Lauseen (IV.31) perusteella on olemassa vakio C, jolla on voimassa

$$\mathbb{E}\bigg([J]^{p/2} + \Big(\sum(\Delta\langle J, N\rangle)^2\Big)^{p/2}\bigg) \leq C\mathbb{E}([X]^{p/2}).$$

Josta kohta iv. seuraakin normin $|||\cdot|||_p$ määritelmän perusteella.

Tarkastellaan implikaatiota iv. ⇒ vi. . Kohdasta iv. ja lemmasta (IV.37) seuraa

$$|||X|||_p \leq C\Big\|[X]_T^{1/2}\Big\|_p \leq C\|X_T^*\|_p^{1/2}|||X|||_p^{1/2}.$$

Voidaan olettaa, että $\|X_T^*\|_p < \infty$ ja pysäyttämällä $|||X|||_p < \infty$. Kohta vi. seuraa nyt jakamalla edeltävä yhtälö luvulla $|||X|||_p^{1/2}$.

Todistetaan implikaatio vi. $\Rightarrow$ iii. seuraavaksi. Olkoon $\eta > 0$ kiinteä. Tarkastellaan $\mathcal{E}$-lokaalisti martingaalia $X = J - \langle J, N\rangle$. Nyt lemman (IV.36) avulla saadaan arvio

$$\begin{aligned}\left\|(\epsilon \cdot X)_T^*\right\|_p &\le \left\|(\epsilon \cdot J)_T^*\right\|_p + \left\|(\epsilon \cdot \langle J, N\rangle)_T^*\right\|_p \\ &\le C\Big(\left\|[J]_T^{1/2}\right\|_p + \left\|(\Delta\langle J, N\rangle)_T^*\right\|_p + \eta\Big).\end{aligned}$$

Koska $|||\epsilon \cdot X|||_p = |||X|||_p$, kohta iii. seuraa.

Jäljellä on enää viimeisen implikaation iii. $\Rightarrow$ i. todistaminen. Koska lauseen (II.47) iii. perusteella $\Delta\langle J, N\rangle = {}^P(\Delta[J, N]) = {}^P(\Delta J \Delta N)$, on voimassa

$$\sup_{0\le t\le T} (\Delta\langle J, N\rangle_t)^p \le \sup_{0\le t\le T} {}^P(|{}^P(|\Delta N|^q)^{1/q} \Delta J|^p)_t.$$

Lemman (IV.32) perusteella, arvoilla $r = p \le s = \infty$, saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} (\Delta\langle J, N\rangle_t)^p\Big) &\le 2\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} |{}^P(|\Delta N|^q)_t^{1/q} \Delta J_t|^p\Big) \\ &\le 2\mathbb{E}([{}^P(|\Delta N|^q)^{1/q} \cdot J]_T^{p/2}).\end{aligned}$$

Joten saadaan

$$\mathbb{E}(\langle J, N\rangle_T^p) \le C\mathbb{E}([(1 + {}^P(|\Delta N|^q I_{\{|\Delta N|>1\}})^{1/q}) \cdot J]_T^{p/2}),$$

josta seuraa lauseen (IV.28) perusteella, että prosessi $\hat{N}$ kuuluu avaruuteen bmo_q, ja lause (IV.35) on todistettu. □

Lause (IV.25) seuraa nyt suoraan lauseesta (IV.35).

Seuraava lause koskee normien $|||X|||_p$ ja $\|X_T\|_p$ ekvivalenttiutta $\mathcal{E}$-martin gaaleille.

Lause IV.38. *Olkoot $1 < p < \infty$ ja q Hölderin liittolukuja ja $\mathcal{E}$ säännöllinen. Tällöin seuraavat lauseet ovat yhtäpitäviä.*

i. $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_q)-epäyhtälön.

ii. On olemassa vakio $C > 0$, jolla kaikilla pysäytyshetkillä τ ja prosesseilla $X \in \mathcal{M}(\mathcal{E}^\tau)$ on voimassa

$$C^{-1}\left\|[X]_T^{1/2}\right\|_p \le \left\|X_T\right\|_p \le C\left\|[X]_T^{1/2}\right\|_p.$$

iii. On olemassa vakio C, jolla kaikilla pysäytyshetkillä τ ja prosesseilla $X \in \mathcal{M}(\mathcal{E}^\tau)$ on voimassa

$$|||X|||_p \le C\|X_T\|_p.$$

Todistus. [15] Th. 4.12 □

V. AVARUUS $\mathcal{G}_T(\Theta)$ JA HAJOTELMIA

Lyhyt johdatus rahoitusteoriaan

Edellisissä luvuissa käsitellyllä stokastisten prosessien teorialla on sovelluksia rahoitusteoriassa, erityisesti tietyissä optimointiongelmissa. Otetaan lähtökohdaksi todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, jossa $\mathbb{F}$ on historia $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{0 \leq t \leq T}$. Mallissa ajatellaan olevan d riskillistä arvopaperia, joiden diskontattuja hintoja kuvaa d-ulotteinen $\mathbb{F}$-sopiva hintaprosessi X, ja riskitön arvopaperi, jonka diskontattu hinta $Y \equiv 1$. Hetkellä t tunnettua informaatiota kuvataan σ-algebralla $\mathcal{F}_t$ ja X_t^i merkitsee arvopaperin i diskontattua hintaa hetkellä t. Hintaprosessin $\mathbb{F}$-sopivuus tarkoittaa hintojen X_t^i olevan tiedossa hetkellä t. Hintaprosessien oletetaan tässä esityksessä olevan erityisiä semimartingaaleja, joilla on kanoninen hajotelma $X = X_0 + M + A$.

Keskeinen ongelma rahoitusteoriassa on vaateiden hinnoittelu ja suojaus. Hyvin tunnettu esimerkki vaateesta on eurooppalainen osto-optio jollekin arvopaperille i, joka erääntyy hetkellä T ja antaa oikeuden ostaa arvopaperi i kyseisellä hetkellä hinnalla K. Voitto option omistajalle hetkellä T on satunnainen summa

$$H(\omega) = (X_T^i - K)^+.$$

Yleisemmin eurooppalaisia vaateita tarkastellaan $\mathcal{F}_T$-mitallisina satunnaismuuttujina H, jotka kuvaavat vaateen omistajan saamaa satunnaista voittoa hetkellä T. Tässä eurooppalaisuus tarkoittaa vaateen erääntymispäivän kiinteyttä erotuksen amerikkalaisiin vaateisiin, joiden erääntymispäivää ei ole kiinnitetty. Eurooppalaisten vaateiden arvot voivat kuitenkin riippua hintaprosessin X koko historiasta hetkeen T saakka tai jopa siihen sisältymättömästä informaatiosta, jos historia $\mathbb{F}$ on riittävän laaja. Hinnoittelun ja suojauksen ongelma voidaan nyt muotoilla seuraavasti: mikä vaateen H hinnan tulisi olla hetkellä 0 ja miten vaateen myyjä voi suojautua hetkellä T koittavia satunnaisia tappioita vastaan?

Otetaan lähtökohdaksi tätä ongelmaa tarkastellessa dynaamiset sijoitusstrategiat $(\theta, \beta) = (\theta_t, \beta_t)_{0 \leq t \leq T}$, jossa θ on d-ulotteinen ennustettava prosessi ja prosessi β on $\mathbb{F}$-sopiva. Prosessi θ_t^i kuvaa riskillisen arvopaperin i määrää strategiassa hetkellä t ja β_t on riskittömään arvopaperiin investoitu määrä. Tässä prosessin θ ennustettavuus on matemaattinen muotoilu sille, että riskillisten arvopapereiden hinnat eivät ole tiedossa investointeja tehdessä.

Sijoitusstrategian arvo V millä tahansa ajanhetkellä t on

$$V_t = \theta_t' X_t + \beta_t,$$

jossa $'$ merkitsee transpoosia, ja strategian aiheuttamat kulut C hetkeen t saakka ovat

$$C_t = V_t - (\theta \cdot X)_t.$$

Sijoitusstrategiaa kutsutaan omavaraiseksi, jos sen kuluprosessi C on vakio ajan suhteen. Silloin arvoprosessi V saa muodon

$$V_t = c + (\theta \cdot X)_t = c + G_t(\theta), \tag{V.1}$$

jossa $c = C_0 = V_0$ on tarvittava alkupääoma. Omavaraisten strategioiden tapauksessa on mahdollista kompensoida kaikki hintaprosessin X heilahtelut muuttamalla riskittömään ja riskillisiin arvopapereihin sijoittuja määriä, niin ettei enempää kuluja tai tuottoja pääse muodostumaan. On myös helppoa havaita, että alkupääoma c ja prosessi θ määrittelevät omavaraisen sijoitusstrategian täydellisesti.

Tarkastellaan seuraavaksi arbitraasin käsitettä. Intuitiivisesti arbitraasimahdollisuus on sijoitusstrategia, joka tuottaa positiivisen voiton nollasta eroavalla todennäköisyydellä ilman minkäänlaista tappion riskiä. Yksi tapa muotoilla tämä matemaattisesti on seuraava. Omavaraista sijoitusstrategiaa kutsutaan arbitraasimahdollisuudeksi, jos sen arvoprosessille V on voimassa

$$V_0 \leq 0, \quad V_T \geq 0 \quad \mathbb{P} - m.v. \quad ja \quad \mathbb{P}(V_T > 0) > 0.$$

Kuitenkaan, kuten Harrison ja Kreps [36] havaitsivat, eivät kaikki pelkät integroituvuusehdot täyttävät prosessit θ ole järkeviä sijoitusstrategioita. Ongelmana ovat prosessit $\theta \cdot X$, jotka eivät ole tasaisesti rajoitettuja alhaalta. Seuraava esimerkki selventänee tilannetta.

Esimerkki V.1. *Määritellään todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia $(\xi_n)_{n\geq 1}$, joilla $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Näiden satunnaismuuttujien voidaan ajatella kuvaavan sijoituksen tuottoa tai tappiota hetkellä n. Olkoon historia $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{n\geq 0}$, jossa $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Määritellään hintaprosessi X, $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Jos sijoittaja ostaa a kappaletta prosessin X kuvaamaa arvopaperia, niin hetkellä n hänen sijoituksensa arvo on $a\xi_n$. Olkoon nyt $\tau = \inf\{n \mid \xi_n = +1\}$, jolloin $\tau < \infty$ melkein varmasti. Määritellään sijoitusstrategia θ seuraavasti, $\theta_0 = 1$ ja $\theta_k = 2^k$, jos $k < \tau$. Tällöin saadaan $(\theta \cdot X)_\infty = 1$ melkein varmasti, joten tämä sijoitusstrategia tuottaa varman voiton. Kuitenkaan käytännössä tätä strategiaa ei voisi käyttää varman voiton saamiseen eli arbitraasimahdollisuutena. Sijoittajamme saattaa nimittäin joutua odottamaan hyvin pitkän ajan ennen kuin ξ_n saavuttaa arvon 1 ensimmäisen kerran. Todennäköisyys sille, että joudutaan odottamaan hetkeen n saakka on 2^{-n}. Siihen mennessä sijoitusstrategia on vaatinut jo $-(2^n - 1)$ yksikköä, joka saattaa ylittää sijoittajan budjetin.*

Tällaisten strategioiden välttämiseksi määritellään hyväksyttävät strategiat seuraavasti. Prosessia $\theta \in L(X)$, $\theta : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ kutsutaan α-hyväksyttäväksi, jos on olemassa vakio $\alpha \geq 0$, jolla $\theta \cdot X \geq -\alpha$ ja raja-arvo $\lim_{t\to T}(\theta \cdot X)_t = (\theta \cdot X)_T$ on olemassa. Prosessia kutsutaan hyväksyttäväksi, jos sen α-hyväksyttävä jollain α. Määritellään lisäksi joukko $K = \{(\theta \cdot X)_T | \, \theta \, hyv\ddot{a}ksytt\ddot{a}v\ddot{a}\}$, joka on kaikkien hyväksyttävien strategioiden, alkupääomanaan $c = 0$, päätearvojen muodostama kartio. Nyt voidaan määritellä arbitraasivapaus[1]semimartingaaleille. Semimartingaali X on arbitraasivapaa, jos $K \cap L_0^+ = \{0\}$. Kun arbitraasivapaus on voimassa, voivat sijoittajat tehdä voittoa hyväksyttävillä strategioilla vain hyväksyessään samalla myös tappion mahdollisuudet.

Tarkastellaan vaadetta H, jolle on olemassa sellainen omavarainen strategia (c, θ), jonka päätearvo $V_T = H$ melkein varmasti. Tällaisen vaateen sanotaan olevan suojattavissa. Jos markkinamalli on arbitraasivapaa, tulee vaateen hinnan olla c ja prosessi θ antaa vaateelle H täydellisen suojauksen. Suojattaville vaateille on siis voimassa

$$H = H_0 + (\xi^H \cdot X)_T \quad \mathbb{P} - m.v.$$

(jossa prosessin ξ^H tulee täyttää riittävät integroituvuusehdot) ja markkinamallia, jossa kaikki vaateet ovat suojattavissa kutsutaan täydelliseksi.

Täydellisten markkinamallien tärkein ominaisuus on mahdollisuus vaateiden hintojen ja suojauksien määrittämiseen riippumatta markkinoilla toimivien tahojen preferensseistä. Täydellisyys on tosin harvinainen ja herkkä ominaisuus. Tunnetuin esimerkki täydellisestä markkinamallista, geometriseen Brownin liikkeeseen perustuva klassinen Black-Scholes -malli [6], [51], muuttuu epätäydelliseksi jo hyppykomponentin lisäämisestä hintaprosessiin. Lisäksi diskreetissä ajassa moniperiodiset markkinamallit ovat täydellisiä vain jos todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ atomien lukumäärää rajoittaa ylhäältä luku $(d+1)^T$ [30].

Epätäydellisessä tilanteessa on mahdollista pitää kiinni preferenssivapaudesta tarkastelemalla arbitraasivapauden kanssa yhteensopivien hintojen joukkoja markkinamallissa, jossa käydään kauppaa arvopapereilla X, Y ja H [27]. Vaihtoehtona on ottaa hintojen laskemisessa ja sijoitusstrategioiden valinnassa käyttöön erilaisia subjektiivisiä kriteerejä, joista tässä tarkastellaan kahta esimerkkiä.

Vaateelle H, joka ei ole suojattavissa, on määritelmän mukaan mahdotonta löytää omavaraista strategiaa, jonka päätearvo $V_T = H$. Yksi mahdollisuus on pitää kiinni tästä pääte-ehdosta $V_T = H$. Koska prosessi β on $\mathbb{F}$-sopiva, tämä ehto on aina mahdollista täyttää sopivalla prosessin β päätearvon β_T valinnalla. Nyt kuluprosessi C ei ole enää vakio ajan suhteen ja "hyvän"sijoitusstrategian kuluprosessin tulisi olla jossain mielessä "pieni". Föllmer ja Sondermann [32] ehdottivat ensimmäisinä tähän neliöllistä ehtoa riskin minimoimiseksi hintaprosessin X ollessa martingaali. He kutsuivat jäljellä olevan riskin

$$R_t^\theta = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\Big[(C_T - C_t)^2 | \mathcal{F}_t\Big],$$

jossa odotusarvo otetaan ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ suhteen, kaikilla ajanhetkillä $0 \leq t \leq T$ minimoivaa strategiaa $\tilde{\theta}$ lokaalisti riskin minimoi-

[1] No Arbitrage, NA

vaksi sijoitusstrategiaksi. He osoittivat tällaisen strategian kuluprosessin C olevan hintaprosessin X kanssa ortogonaalisen martingaalin. Tämä kääntyy seuraavaksi ehdoksi vaateelle H. Vaateelle H on olemassa lokaalisti riskin minimoiva sijoitusstrategia, jos ja vain jos vaateella H on seuraava hajotelma

$$H = H_0 + (\xi^H \cdot X)_T + L_T^H \quad \mathbb{P} - m.v., \tag{V.2}$$

jossa L^H on hintaprosessin X kanssa ortogonaalinen martingaali, $\langle X, L^H \rangle = 0$. Föllmer ja Schweizer tarkastelivat tätä hajotelmaa ensimmäisinä semimartingaalien tapauksessa ja sitä kutsutaankin satunnaismuuttujan H Föllmerin ja Schweizerin hajotelmaksi. Tämä hajotelma antaa suoraan strategian riskillisen osan $\theta = \xi^H$ ja riskitön osa β määräytyy kuluprosessille C saatavasta ehdosta $C = H_0 + L_H$. Suojattavissa olevilla vaateilla hajotelman ortogonaalinen termi L^H yksinkertaisesti katoaa.

Edeltävän menetelmän haittana on, ettei sijoitusstrategia ole enää omavarainen. Jotta voitaisiin varmuudella välttää yllättäviä kuluja tai suunnittelemattomia tuloja, voidaan päättää pitää kiinni omavaraisuusehdosta (V.1). Tällaisten strategioiden päätearvot ovat muotoa $c + G_T(\theta)$, jossa $c \in \mathbb{R}$ on alkupääoma ja prosessi $\theta \in \Theta$ toteuttaa valitut riittävät integroituvuusehdot. Kuitenkaan yksikään vaade H, joka ei ole suojattava, ei ole tätä muotoa. Onkin luonnollista etsiä paria (c, θ), jolla lauseke $c + G_T(\theta)$ parhaiten approksimoisi satunnaismuuttujaa H. Ongelmana on siis satunnaismuuttujan $H \in L^p$ projisointi avaruudelle $\mathbb{R} + \mathcal{G}_T(\Theta)$, jossa $\mathcal{G}_T(\Theta) = \{(\theta \cdot X)_T \mid \theta \in \Theta\}$. Tärkeää onkin tietää, milloin stokastisten integraalien avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta)$ on suljettu avaruudessa L^p. Tätä kysymystä sekä Föllmerin ja Schweizerin hajotelman olemassaoloa tarkastellaan tarkemmin seuraavissa osioissa.

Neliöintegroituvat martingaalit

Otetaan ensimmäiseksi tarkasteltavaksi hajotelman (V.2) olemassaolo neliöintegroituville martingaaleille, jolloin se tunnetaan Kunitan ja Watanaben hajotelman nimellä.

Jos $H \in \mathbb{L}_p^2(\mathbb{P} \otimes [M, M]_\infty) := \{H \ ennustettava \mid \mathbb{E} \int_0^\infty H_s^2 d[M, M]_s < \infty\}$ ja $M \in \mathcal{M}^2$, niin operaattori $H \mapsto H \cdot M$, missä $H \cdot M$ on prosessin H stokastinen integraali martingaalin M suhteen, on isometria Hilbertin avaruuksien $\mathbb{L}_p^2(\mathbb{P} \otimes [M, M]_\infty)$ ja $\mathcal{M}^2$ välillä.

Tästä seuraa, että lineaarinen aliavaruus,

$$G(H) := \{H \cdot M \mid H \in \mathbb{L}_p^2(\mathbb{P} \otimes [M, M]_\infty)\}, \tag{V.3}$$

on suljettu avaruudessa $\mathcal{M}^2$.

Määritelmä V.2. Avaruuden $\mathcal{M}^2$ suljettu lineaarinen aliavaruus $\mathcal{G}$ on vakaa aliavaruus, jos

i. kaikille pysäytysajoille τ, $M \in \mathcal{G} \Rightarrow M^\tau \in \mathcal{G}$, ja

ii. kaikille $A \in \mathcal{F}_0$, $M \in \mathcal{G} \Rightarrow I_A M \in \mathcal{F}_0$

Jos tarkastellaan jälleen aliavaruutta $G(H)$, havaitaan, että kaikilla pysäytyshetkillä τ ja $A \in \mathcal{F}_0$,

$$(H \cdot M)^\tau = (HI_{\Omega\times[0,\tau]} \cdot M) \in G(H)\ ja$$

$$I_A(H \cdot M) = I_{A\times[0,\infty)} H \cdot M \in G(H).$$

G(H) on siis vakaa aliavaruus.

Lause V.3. *Olkoon $\mathcal{G}$ avaruuden $\mathcal{M}^2$ vakaa aliavaruus. Silloin myös $\mathcal{G}^\perp$ on vakaa aliavaruus ja jos $M \in \mathcal{G}$ ja $N \in \mathcal{G}^\perp$, niin M ja N ovat ortogonaalisia, $M \perp N$.*

Todistus. Olkoon $M \in \mathcal{G}$ ja $N \in \mathcal{G}^\perp$. Kaikille pysäytyshetkille τ, $M^\tau \in \mathcal{G}$, joten

$$\mathbb{E}(M_\infty N_\infty^\tau) = \mathbb{E}(M_\infty N_\tau) = \mathbb{E}(M_\tau N_\tau) = \mathbb{E}(M_\infty^\tau N_\infty) = 0.$$

Saadaan $N^\tau \in \mathcal{G}^\perp$. Toisaalta, jos $A \in \mathcal{F}_0$, niin $I_A M \in \mathcal{G}$ ja $\mathbb{E}(I_A N_\infty M_\infty) = 0$. Siis saatiin $I_A N \in \mathcal{G}^\perp$. Eli $\mathcal{G}^\perp$ on vakaa aliavaruus.

Nyt kaikille pysäytyshetkille τ ja $A \in \mathcal{F}_0$, $\mathbb{E}(M_\tau N_\tau) = \mathbb{E}(M_\infty^\tau N_\infty^\tau) = 0$, ja $\mathbb{E}(I_A M_\tau N_\tau) = 0$. Erityisesti, kun $\tau = 0$, saadaan $M_0 N_0 = 0$ melkein varmasti. Joten $M \perp N$. □

Seuraus V.4. *Jos $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}^2$ on vakaa aliavaruus, niin kaikilla $M \in \mathcal{M}^2$ on yksikäsitteinen hajotelma*

$$M = N + N', \tag{V.4}$$

missä $N \in \mathcal{G}$ ja $N' \in \mathcal{G}^\perp$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{G}_\infty$ satunnaismuuttujien $\{M_\infty \mid M \in \mathcal{G}\}$ generoima suljettu aliavaruus ja määritellään $\mathcal{G}_\infty^\perp$ vastaavasti. Kaikilla M_∞, $M \in \mathcal{M}^2$, on olemassa yksikäsitteinen hajotelma

$$M_\infty = N_\infty + N'_\infty,$$

missä $N_\infty \in \mathcal{G}_\infty$ ja $N'_\infty \in \mathcal{G}_\infty^\perp$. Tällöin määritellään N (vastaavasti N') siksi martingaaliksi, jolle

$$N_t = \mathbb{E}[N_\infty|\mathcal{F}_t] \quad (vastaavasti\ N'_t = \mathbb{E}[N'_\infty|\mathcal{F}_t]).$$

□

Seuraus V.5. *(Kunita-Watanaben hajotelma) Olkoon $M, N \in \mathcal{M}^2$ ja $G(H) = \{H \cdot M \mid H \in \mathbb{L}_p^2(\mathbb{P} \otimes [M,M]_\infty)\}$. On olemassa yksikäsitteinen hajotelma,*

$$N = N' + L, \tag{V.5}$$

missä $N' \in G(H)$ ja $L \perp M$.

Lokalisoimalla ylläoleva hajotelma yleistyy kaikille $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$. Ensimmäisinä tämän hajotelman olemassaolon neliöintegroituville martingaaleille todistivat Kunita ja Watanabe [48] ja Jacod [40] yleistyksen neliöintegroituville martingaaleille, jotka saavat arvoja avaruudessa $\mathbb{R}^d$.

Myös jos N on lokaali martingaali muttei välttämättä neliöintegroituva ja M on lokaali jatkuva martingaali, on ylläoleva hajotelma olemassa [2]. N voidaan kirjoittaa muodossa $N = N^c + N^d$, jossa N^c on martingaalin N jatkuva osa, N^d täysin epäjatkuva osa ja N^d on ortogonaalinen lokaalisti neliöintegroituvan jatkuvan martingaalin N^c kanssa. Sovelletaan Kunita-Watanaben hajotelmaa martingaaliin N^c, $N^c = N' + U$, $N' \in G(H)$ ja $U \perp G(H)$. Saadaan $N = N' + L$, $L = U + N^d$ ja $L \perp G(H)$.

Se ettei tällaista hajotelmaa yleisesti ole olemassa, kun N on lokaalisti neliöintegroituva martingaali ja M lokaali martingaali, voidaan osoittaa reductio ad absurdum [40]. Olkoon historia sellainen, että $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$, kun $t < \frac{1}{2}$, $\mathcal{F}_0$ sisältää kaikki $\mathbb{P}$-nollamitalliset joukot ja $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$, kun $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Havaitaan, että ennustettavat prosessit H ovat vakioita välillä $[0, \frac{1}{2}]$ ja pysäytyshetkille τ on voimassa $\mathbb{P}(\tau < \frac{1}{2}) = 0$ tai $\mathbb{P}(\tau < \frac{1}{2}) = 1$. Tällöin kaikki lokaalit martingaalit M ovat martingaaleja ja voidaan kirjoittaa $M_t = \mathbb{E}(M_1)I_{[0,1/2)} + M_1 I_{[1/2,1]}$.

Olkoon U ja V satunnaismuuttujia, joille $\mathbb{E}(V^2) < \infty$, $\mathbb{E}(U^2) = \infty$ ja $\mathbb{E}(UV) \neq 0$. Asetetaan $M = UI_{[1/2,1]}$ ja $N = VI_{[1/2,1]}$. M ja N eivät ole ortogonaalisia, koska $\mathbb{E}(UV) \neq 0$. Joten on olemassa Kunita-Watanaben hajotelma $N = H \cdot M + L$, jossa $H \neq 0$, $H \cdot M = hUI_{[1/2,1]}$, $L = ZI_{[1/2,1]}$ ja $\mathbb{E}(UZ) = 0$. Siis $V = hU + Z$ ja saadaan $\mathbb{E}(V^2) = h^2\mathbb{E}(U^2) + \mathbb{E}(Z^2)$, joka on mahdotonta, jos $h \neq 0$.

Semimartingaalit

Seuraavaksi tarkastellaan, milloin avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta) = \{(\theta \cdot X)_T : \theta \in \Theta\}$ on avaruuden $L^2(\mathbb{P})$ suljettu aliavaruus, jossa prosessi X on semimartingaali ja $\Theta = L^2(M) \cap L^2(A)$. On olemassa kaksi tapaa tarkastella stokastista integraalia $\theta \cdot X$, joko stokastisena prosessina $(\theta \cdot X)_{0 \leq t \leq T}$ tai satunnaismuuttujana $(\theta \cdot X)_T$. Ensimmäisessä tapauksessa voidaan avaruudessa Θ määritellä kaksi normia $|||\cdot|||_2$ ja $\|\cdot\|_{\mathcal{G}(\theta)} = \|(\theta \cdot X)^*_T\|_{L^2(\mathbb{P})}$. Kumpikin näistä normeista saa arvon 0, jos ja vain jos prosessi $(\theta \cdot X)_{0 \leq t \leq T}$ häviää melkein varmasti. Vastaavasti avaruudessa $\mathcal{G}_T(\Theta)$ tarkastellaan normia $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}$.

Tarkastellaan seuraavaa diagrammia,

$$(\Theta, |||\cdot|||_2) \xrightarrow{\ \varphi\ } (\Theta, \|\cdot\|_{\mathcal{G}(\Theta)}) \xrightarrow{\ \psi\ } (\mathcal{G}_T(\Theta), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}),$$

jossa φ on identtinen kuvaus ja ψ kuvaa avaruuden Θ alkion θ satunnaismuuttujalle $(\theta \cdot X)_T$.

Molemmat kuvaukset ovat jatkuvia ja surjektiivisia. Koska avaruus $(\Theta, |||\cdot|||_2)$ on Banachin avaruus, kysymys siitä ovatko avaruudet $(\Theta, \|\cdot\|_{\mathcal{G}(\Theta)})$ ja $(\mathcal{G}_T(\Theta), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})})$ täydellisiä palautuu avoimen kuvaajan lauseen perusteella siihen, ovatko kuvaukset φ ja $\psi \circ \varphi$ avoimia.

Tähän liittyy kysymys siitä, millä ehdoin kuvaus ψ on bijektio. Toisin sanoen milloin ehdolla $(\theta \cdot X)_T = 0$ koko prosessi $\theta \cdot X$ häviää melkein varmasti. Tämä pätee onneksi melko lievin olettamuksin. Kuten kohta nähdään, on riittävää, että prosessi X on erityinen semimartingaali ja on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{Q}$, jolla on neliöintegroituva tiheys $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, ja jonka suhteen X on lokaali martingaali.

Valitaan sellainen $\theta \in \Theta$, jolla satunnaismuuttuja $(\theta \cdot X)_T = 0$. Määritellään prosessi Z seuraavasti

$$Z_t = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T$$

ja prosessi $G(\theta) = (\theta \cdot X)_{0 \leq t \leq T}$. Prosessi Z positiivinen neliöintegroituva $\mathbb{P}$-martingaali ja prosessi $G(\theta)Z$ on lokaali $\mathbb{P}$-martingaali. Nyt Doobin epäyhtälön perusteella prosessit $G(\theta)^*$ ja Z^* ovat avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$. Tästä seuraa, että $(G(\theta)Z)^*$ on $\mathbb{P}$-integroituva, joten prosessi $G(\theta)Z$ on $\mathbb{P}$-martingaali. Oletuksen mukaan $(\theta \cdot X)_T = 0$, joten $\mathbb{P}$-martingaali $G(\theta)Z$ häviää identtisesti. Koska prosessi Z on positiivinen melkein varmasti, häviää prosessi $G(\theta)$ melkein varmasti.

Edeltävän tuloksen ja Banachin isomorfismilauseen ([54],[11]) avulla saadaan seuraava lause.

Lause V.6. *Olkoon prosessi X erityinen semimartingaali. Silloin on voimassa*

i. Normiavaruus $(\Theta, \|\cdot\|_{\mathcal{G}(\theta)})$ on täydellinen jos ja vain jos kuvaus ϕ on isomorfismi, eli on olemassa vakio $C > 0$, jolla on voimassa kaikilla $\theta \in \Theta$

$$|||\theta||| \leq C\|\theta\|_{\mathcal{G}(\Theta)}.$$

ii. Jos lisäksi on olemassa ekvivalentti todennäköisyysmitta, jolla $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ja jonka suhteen X on lokaali martingaali, niin normiavaruus $(\mathcal{G}_T(\Theta), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})})$ on täydellinen. Tällöin avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta)$ on suljettu avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$, jos ja vain jos kuvaus $\psi \circ \phi$ on isomorfismi, eli on olemassa vakio $C > 0$, jolla on voimassa kaikilla $\theta \in \Theta$

$$|||\theta||| \leq C\|\mathcal{G}_T(\Theta)\|_{L^2(\mathbb{P})}.$$

Edeltävät tulokset ovat voimassa erityisille semimartingaaleille. Jatkuvien semimartingaalien tapauksessa Delbaen et.al. [18] ovat todistaneet seuraavan lauseen koskien ehtoja, joilla avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta)$ on suljettu. Ennen tätä lausetta määritellään mitta $\mathbb{Q}^{opt}$, jonka olemassaolo on kytköksissä samaan ongelmaan. Tämän mitan olemassaoloa käsittelevät laajemmin Delbaen ja Schachermayer [21].

Määritelmä V.7. Mitta $\mathbb{Q}^{opt}$ on pienimmän L^2 normin omaava ekvivalentti todennäköisyysmitta, jonka suhteen $\mathbb{P}$-semimartingaali X on lokaali martingaali. Toisin sanoen mitta $\mathbb{Q}^{opt}$ minimoi lausekkeen

$$\left\|\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right\|_{L^2(\mathbb{P})}.$$

Lause V.8. *Olkoon X jatkuva semimartingaali ja $\mathbb{Q}$ ekvivalentti todennäköisyysmitta, jolla $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jonka suhteen X on lokaali martingaali. Silloin seuraavat lauseet ovat yhtäpitäviä.*

i. *Stokastisten integraalien avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta) = \{(H \cdot X)_T : H \in L(X)\}$ on avaruuden $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suljettu aliavaruus ja on olemassa ekvivalentti todennäköisyysmitta $\mathbb{Q}$, jonka suhteen X on lokaali martingaali.*

ii. *On olemassa ekvivalentti todennäköisyysmitta $\mathbb{Q}$, jonka suhteen X on lokaali martingaali, ja joka toteuttaa (R_2)-epäyhtälön.*

iii. *Mitta $\mathbb{Q}^{opt}$ on hyvin määritelty ja toteuttaa (R_2)-epäyhtälön.*

Todistus. [18] Th. 4.1 □

Nyt voidaan esittää Föllmerin ja Schweizerin hajotelman määritelmä jatkuville semimartingaaleille. Tämän hajotelman olemassaolo riippuu minimaalisen martingaalimitan $\mathbb{Q}^{min}$ ominaisuuksista, jonka määritelmä esitetään jäljempänä.

Määritelmä V.9.

i. Olkoon X jatkuva semimartingaali, jolla on kanoninen hajotelma $X = X_0 + M + A$. Silloin satunnaismuuttujalla $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on Föllmerin ja Schweizerin hajotelma, jos

$$H = H_0 + (\theta \cdot X)_T + L_T \quad m.v.,$$

jossa $H_0 \in \mathcal{F}_0$, $\theta \in \Theta$ ja $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{M}_0^2$ on ortogonaalinen prosessin M kanssa.

ii. Jatkuvalla semimartingaalilla X on Föllmerin ja Schweizerin hajotelma, jos on olemassa yksikäsitteiset projektiot π_0, π_1 ja $\pi_2 : L^2(\mathbb{P}) \to L^2(\mathbb{P})$, joilla kaikilla satunnaismuuttujilla $H \in L^2(\mathbb{P})$ on olemassa Föllmerin ja Schweizerin hajotelma

$$H = \pi_0(H) + \pi_1(H) + \pi_2(H) = H_0 + (\theta \cdot X)_T + L_T.$$

Jatkuvalta semimartingaalilta vaaditaan myös ns. rakenne-ehto, joka liittyy arbitraasiominaisuuksiin [19]. Jatkuville semimartingaaleille X rakenne-ehdon toteuttaminen on välttämätöntä sellaisen mitan olemassaololle, jonka suhteen X on lokaali martingaali [18].

Määritelmä V.10. Semimartingaali X, jolla on kanoninen hajotelma $X = X_0 + M + A$ toteuttaa rakenne-ehdon, jos on olemassa ennustettava, arvonsa avaruudessa $\mathbb{R}^d$ saava prosessi $\lambda = (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$, jolla on voimassa

$$dA_t = d\langle M \rangle_t \lambda_t \quad m.v. \quad \forall t \in [0, T]$$

ja

$$\int_0^t \lambda_s' d\langle M \rangle_s \lambda_s < \infty \quad m.v. \quad \forall t \in [0, T],$$

missä $'$ merkitsee transpoosia.

Seuraavaksi määritellään jatkuville semimartingaaleille jo edellä mainittu minimaalinen martingaalimitta [31], [21].

Määritelmä V.11. Olkoon X jatkuva $\mathbb{P}$-semimartingaali, jolla on hajotelma $X = M + A = M + \alpha' \cdot \langle M \rangle$, α on ennustettava prosessi. Minimaalinen martingaalimitta $\mathbb{Q}^{min}$ on silloin mitan $\mathbb{P}$ kanssa ekvivalentti mitta, jolla on tiheys

$$\frac{d\mathbb{Q}^{min}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-\alpha' \cdot M)_T.$$

Nyt ollaan valmiita esitettämään lause koskien Föllmerin ja Schweizerin hajotelman olemassaoloa jatkuville semimartingaaleille.

Lause V.12. *Olkoon X jatkuva semimartingaali, joka toteuttaa rakenne-ehdon. Silloin semimartingaalilla X on Föllmerin ja Schweizerin hajotelma, jos ja vain jos mitta $\mathbb{Q}^{min}$ on olemassa ja toteuttaa (R_2)-epäyhtälön.*

Todistus. [18] Th. 6.3 □

Siirrytään tarkastelemaan avaruutta $\mathcal{G}_T(\Theta^p) = \{(\theta \cdot X)_T : \theta \in \Theta^p\}$, jossa $\Theta^p = L^p(M) \cap L^2(A)$, sellaisten erityisten semimartingaalien tapauksessa, jotka eivät ole välttämättä jatkuvia.

Seuraava lause on peräisin Choullilta, Strickeriltä ja Krawczykiltä [15].

Lause V.13. *Oletetaan, että prosessi $\mathcal{E}$ on säännöllinen ja toteuttaa (R_q)-epäyhtälön, jossa q ja $p \in (1, \infty)$ ovat Hölderin liittolukuja. Silloin millä tahansa σ-algebralla $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{F}_0$, avaruudet $\mathcal{G}_T(\Theta^p)$ ja $L^p(\mathcal{H}_0) + \mathcal{G}_T(\Theta^p)$ ovat suljettuja avaruudessa L^p.*

Todistus. Kun $\theta \in \Theta^p$ ja $X_0 \in L^p(\mathcal{G}_0)$, prosessi $X_0 + \theta \cdot X$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{H}^p$. Nyt lauseesta (IV.19) seuraa, että prosessi $X_0 + \theta \cdot X$ on $\mathcal{E}$-martingaali. Olkoon $X_0^n + (\theta^n \cdot X)_T$ jono avaruudessa $L^p(\mathcal{H}_0) + \mathcal{G}_T(\Theta^p)$, jolla on raja-arvona avaruudessa L^p prosessi Y. Lauseen (IV.38) perusteella jono $X_0^n + (\theta^n \cdot X)_T$ suppenee avaruudessa $\mathcal{H}^p$. Koska avaruudet $L^p(\mathcal{H}_0)$, $L^p(M)$ ja $L^p(A)$ ovat kukin Banachin avaruuksia, on olemassa prosessit $Y_0 \in L^p(\mathcal{H}_0)$ ja $\theta \in \Theta^p$, joilla on voimassa $Y = Y_0 + (\theta \cdot X)_T$. Joten avaruudet $\mathcal{G}_T(\Theta^p)$ ja $L^p(\mathcal{H}_0) + \mathcal{G}_T(\Theta^p)$ ovat suljettuja. □

Tästä eteenpäin prosessit M ja N ovat lokaalisti neliöintegroituvia martingaaleja ja $M_0 = N_0 = 0$. Prosessi X on erityinen semimartingaali, jolla on kanoninen hajotelma $X = M + A = M - \langle M, N \rangle$, joten se on myös $\mathcal{E}(N)$-lokaalisti martingaali. Oletetaan myös, että semimartingaalille X on voimassa rakenne-ehto ja prosessille N pätee $N = -\lambda \cdot M$.

Koska prosessi $\mathcal{E}$ saattaa hävitä, täytyy Föllmerin ja Schweizerin hajotelman määritelmää hieman muokata. Kuitenkin tapauksessa $T_1 = T$ edellä oleva määritelmä yhtyy aiemmin esitettyyn.

Määritelmä V.14. Föllmerin ja Schweizerin hajotelma.

i. Olkoon X semimartingaali. Satunnaismuuttujalla $H \in L^2$ on Föllmerin ja Schweizerin hajotelma, jos sille on olemassa esitys

$$H = H_0 + (\theta \cdot X)_T + L_T,$$

jossa H_0 on $\mathcal{F}_0$-mitallinen satunnaismuuttuja, $\theta \in \Theta$ ja $L \in \mathcal{M}_0^2$, $\langle M, L \rangle = 0$.

ii. Semimartingaalilla X on Föllmerin ja Schweizerin hajotelma, jos on olemassa yksikäsitteiset jatkuvat projektiot π_0, π_1, π_2 ja π_3^n, $n \geq 1$: $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jolloin kaikilla $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on olemassa Föllmerin ja Schweizerin hajotelma

$$H = \pi_0(H) + \pi_1(H) + \pi_2(H) = H_0 + (\theta \cdot X)_T + L_T,$$

$$\pi_3^n(H) = H_0 + (\theta \cdot X)_{T_n} + L_{T_n},$$

jossa $H_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, $\theta \in \Theta$ ja $\langle M, L \rangle = 0$.

Lause V.15. *Föllmerin ja Schweizerin hajotelman olemassaolo.*

i. Jos prosessi ${}^{T_n}\mathcal{E}$ on neliöintegroituva martingaali kaikilla n, niin satunnaismuuttujalla $H \in L^2$ on olemassa Föllmerin ja Schweizerin hajotelma, jos ja vain jos satunnaismuuttuja H on jonkin $\mathcal{E}(N)$-martingaalin $Y \in \mathcal{H}^2$ päätearvo.

ii. Semimartingaalilla X on Föllmerin ja Schweizerin hajotelma, jos ja vain jos $\mathcal{E}(N)$ on säännöllinen ja toteuttaa (R_2)-epäyhtälön.

Todistus.

i. Jos satunnaismuuttujalla H on olemassa Föllmerin ja Schweizerin hajotelma $H = H_0 + (\theta \cdot X)_T + L_T$, niin prosessi $Y = H_0 + \theta \cdot X + L$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{H}^2$. Tämä prosessi voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon käyttäen stokastisen integraalin ominaisuuksia

$$Y = H_0 + \theta \cdot X + L$$

$$= Y_0 + \theta \cdot M + L - \theta \cdot \langle M, N \rangle + \lambda \cdot \langle L, M \rangle$$
$$= Y_0 + \theta \cdot M + L - \langle \theta \cdot M + L, N \rangle - \langle L, N \rangle$$

ja $\mathbb{E}(Y_T^* ({}^{T_n}\mathcal{E})_T^*) < \infty$. Joten lauseen (IV.19) perusteella prosessi Y on $\mathcal{E}$-martingaali.

Jos taas satunnaismuuttuja H on $\mathcal{E}$-martingaalin Y päätearvo, $H = Y_T$, niin lauseen (IV.38) perusteella prosessi Y kuuluu avaruuteen $\mathcal{H}^2$ ja lauseen (IV.18) mukaan se on muotoa $Y = Y_0 + I - \langle I, N \rangle$, jossa prosessi I on lokaali martingaali. Prosessilla I on olemassa Kunitan ja Watanaben hajotelma, $I = \theta \cdot M + L$, jonka avulla prosessille Y saadaan muoto $Y = Y_0 + \theta \cdot X + L$. Joten satunnaismuuttujalla H on olemassa Föllmerin ja Schweizerin hajotelma $H = Y_T = Y_0 + (\theta \cdot X)_T + L_T$.

ii. Tarkastellaan ensin yksikäsitteisyyttä. Jos $\mathcal{E}$ on säännöllinen ja toteuttaa (R_2)-epäyhtälön ja hajotelma on olemassa, se on lauseen (IV.15) i. perusteella yksikäsitteinen, koska kaikilla n pätee ${}^{T_n}\mathcal{E} \in \mathcal{M}^2$.

    Oletetaan, että $\mathcal{E}$ on säännöllinen ja toteuttaa (R_2)-epäyhtälön. Olkoon H satunnaismuuttuja, joka kuuluu avaruuten L^2. Lauseen (IV.15) iii. perusteella on silloin olemassa prosessi $Y \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, jonka päätearvo satunnaismuuttuja H on, $Y_T = H$. Nyt lauseista (IV.38) ja (IV.18) seuraa, että prosessi Y kuuluu avaruuteen $\mathcal{H}^2$ ja $Y = Y_0 + I + \langle I, N \rangle$. Prosessilla I on olemassa Kunitan ja Watanaben hajotelma, $I = \theta \cdot M + L$, jonka avulla prosessille Y saadaan muoto $Y = Y_0 + \theta \cdot X + L$. Jälleen lauseen (IV.38) mukaan seuraavat epäyhtälöt ovat voimassa: $\|Y_0\|_2 \leq C\|Y_T\|_2$, $\|L_T^*\|_2 \leq C\|Y_T\|_2$ ja $\|(\theta \cdot X)_T^*\|_2 \leq C\|Y_T\|_2$. Tästä seuraa, että projektiot π_0, π_1, π_2 ja π_3^n ovat hyvin määriteltyjä ja jatkuvia, joten Föllmerin ja Schweizerin hajotelma on olemassa.

    Oletetaan nyt, että semimartingaalilla X on Föllmerin ja Schweizerin hajotelma ja merkitään vastaavia projektiota π_0, π_1, π_2 ja π_3^n. Olkoon $(\tau_k)_{k\geq 0}$ kasvava jono pysäytyshetkiä, $\tau_k \to T$, joilla $\int_0^{\tau_k} \lambda' d\langle M \rangle \lambda$ on tasaisesti rajoitettu kaikilla k. Tällöin $\langle N \rangle_{\tau_k} = \int_0^{\tau_k} \lambda' d\langle M \rangle \lambda$ kuuluu avaruuteen L^∞, joten lauseesta (IV.13) seuraa prosessin $\mathcal{E}(N)$ on säännöllisyys ja (R_2)-epäyhtälön toteutuminen. Nyt todistuksen ensimmäisen osan perusteella kaikilla satunnaismuuttujilla $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\tau_k}, \mathbb{P})$ on kaikilla k Föllmerin ja Schweizerin hajotelma $H = H_0 + (\theta \cdot X)_T + L_T$ ja lauseesta (IV.15) seuraa kaikilla n

$$\pi_0(H) = H_0 = \mathbb{E}[H\mathcal{E}_{\tau_k}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Y_T\mathcal{E}_{\tau_k}|\mathcal{F}_0] \quad ja$$

$$\begin{aligned} \pi_3^n(H) &= H_0 + (\theta \cdot X)_{T_n} + L_{T_n} \\ &= Y_{T_n} = \mathbb{E}[H^{T_n}\mathcal{E}_{\tau_k}|\mathcal{F}_{T_n}], \quad kun\, T_n \leq \tau_k. \end{aligned} \tag{V.6}$$

    Oletuksen mukaan projektiot π_0 ja π_3^n ovat jatkuvia avaruudessa L^2, joten prosessi ${}^{T_n}\mathcal{E}$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{M}^2$ kaikilla n. Jälleen lause (IV.15) kertoo $\mathcal{E}$-martingaalin Y päätearvon Y_T määräävän koko prosessin Y ja avaruuden $(\mathcal{H}^2 \cap \mathcal{M}(\mathcal{E}), |||\cdot|||)$ olevan täydellinen. Joten kuvaus $\varphi : (\mathcal{H}^2 \cap \mathcal{M}(\mathcal{E}), |||\cdot|||) \to L^2)$, $\varphi(Y) = Y_T$ on jatkuva injektio kahden Banachin avaruuden välillä. Banachin isomorfismilauseen ([54],[11]) perusteella on olemassa vakio C, jolla kaikilla $Y \in \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{M}(\mathcal{E})$ on voimassa $|||Y||| \leq C\|Y_T\|_2$ ja lokalisoimalla saadaan voimassaolo kaikilla pysäytyshetkillä τ ja prosesseilla $Y \in \mathcal{M}(\mathcal{E}^\tau)$. Nyt lauseesta (IV.38) seuraa, että prosessi $\mathcal{E}$ toteuttaa (R_2)-epäyhtälön.

$\square$

Esimerkki V.16. *Esitetään yksinkertainen esimerkki tilanteesta, jossa avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta)$ on suljettu, Föllmerin ja Schweizerin hajotelma on olemassa ja* *prosessit θ ja L voidaan laskea. Esimerkki on pääosin peräisin M. Schweizerilta [32]. Olkoot N^+ ja N^- kaksi riippumatonta Poisson-prosessia parametrilla λ ja historia $\mathbb{F}$ pienin mahdollinen oikealta jatkuva kokoelma σ-algebroja, joka tekee prosessit N^+ ja N^- $\mathbb{F}$-sopiviksi. Prosessien N^+ ja N^- polut ovat oikealta jatkuvia ja paloittain vakioita. Näiden prosessien hyppyjen suuruus on 1.*

Määritellään prosessit

$$M_t^{\pm} = N_t^{\pm} - \lambda t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

jotka ovat neliöintegroituvia martingaaleja, ja niille on voimassa

$$\langle M^{\pm} \rangle_t = \lambda t, \quad \langle M^+, M^- \rangle = 0.$$

Näiden prosessien avulla jokainen prosessi, joka on neliöintegroituva martingaali M historian $\mathbb{F}$ suhteen, voidaan kirjoittaa seuraavassa muodossa [61]

$$M_t = M_0 + (\xi^+ \cdot M^+)_t + (\xi^- \cdot M^-)_t, \tag{V.7}$$

jossa $\xi^{\pm}$ on yksikäsitteinen ennustettava prosessi avaruudessa $L^2(\mathbb{P} \times dt)$, joka toteuttaa yhtälön

$$\langle M, M^{\pm} \rangle_t = \lambda \int_0^t \xi^{\pm} ds.$$

Asetetaan hintaprosessiksi

$$X = X_0 + N^+ - N^- = X_0 + M^+ - M^-.$$

Hintaprosessi X on myös neliöintegroituva martingaali, jolla

$$\langle X \rangle_t = 2\lambda t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Myös tämän prosessin polut ovat oikealta jatkuvia sekä paloittain vakioita ja prosessin hyppyjen suuruus on 1. Olkoon $N_t = X_t - 2\lambda t$, jolloin lauseen (IV.13) *perusteella $\mathcal{E}(N)$ on säännöllinen ja toteuttaa (R_2)-epäyhtälön. Nyt hintaprosessilla X avaruus $\mathcal{G}_T(\Theta)$ on suljettu ja sillä on olemassa Föllmerin ja Schweizerin hajotelma.*

Olkoon $H \in L^2$ vaade, joka on muotoa $H = h(X_T)$, ja sen arvoprosessi $V_t = \mathbb{E}[H|\mathcal{F}_t] = v(X_t, t)$. Merkitään $\Delta^{\pm}(x, t) = v(x \pm 1, t) - v(x, t)$.

Nyt prosessi $Z = M^+ + M^-$ on neliöintegroituva martingaali, joka on ortogonaalinen prosessin X kanssa. Esityksessä (V.7) *voidaan korvata kanta (M^+, M^-) kannalla (X, Z). Erityisesti arvoprosessille V saadaan seuraava esitys*

$$V_t = V_0 + (\hat{\xi} \cdot X)_t + (\hat{\zeta} \cdot Z)_t.$$

Prosessit $\hat{\xi}$ ja $\hat{\zeta}$ saadaan yhtälöistä

$$\langle V, X \rangle_t = 2\lambda \int_0^t \hat{\xi} ds \quad ja$$

$$\langle V, Z\rangle_t = 2\lambda \int_0^t \hat{\zeta} ds.$$

Seuraavaksi lasketaan prosessit $\hat{\xi}$ ja $\hat{\zeta}$. Tässä käytetään apuna prosesseja

$$[V, X]_t = \sum_{0\leq s\leq t} \Delta V_s \Delta X_s \quad ja$$

$$[V, Z]_t = \sum_{0\leq s\leq t} \Delta V_s \Delta Z_s.$$

Koska prosessi $\langle V, X\rangle$ on se yksikäsitteinen ennustettava prosessi, jolla prosessi $[V, X] - \langle V, X\rangle$ on martingaali, yhtälöstä

$$\begin{aligned}
[V, X]_t &= \sum_{0\leq s\leq t} \big(\Delta^+(X_{s-}, s)\Delta N_s^+ - \Delta^-(X_{s-}, s)\Delta N_s^-\big) \\
&= \int_0^t \Delta^+(X_{s-}, s) dM_s^+ - \int_0^t \Delta^-(X_{s-}, s) dM_s^- \\
&\quad + \lambda \int_0^t \big(\Delta^+ - \Delta^-\big)(X_{s-}, s) ds
\end{aligned}$$

saadaan

$$\langle V, X\rangle_t = \lambda \int_0^t \big(\Delta^+ - \Delta^-\big)(X_{s-}, s) ds.$$

Prosessiksi $\hat{\xi}$ saadaan siis

$$\hat{\xi}_t = \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}(X_{t-}, t)$$

ja vastaavasti

$$\hat{\zeta}_t = \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}(X_{t-}, t).$$

Nyt prosessi $\theta = \hat{\xi}$ ja $L_t = (\hat{\zeta} \cdot Z)_t$.

KIRJALLISUUTTA

[1] H. Ahn and P. Protter. A remark on stochastic integration. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1583, pages 312–315. Springer, 1994.

[2] J.P. Ansel and C. Stricker. Décomposition de Kunita-Watanabe. In *Séminaire de Probabilités XXVII*, Lecture Notes in Mathematics 1557, pages 30–32. Springer-Verlag, 1993.

[3] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 17(3):21–86, 1900.

[4] K. Bichteler. Stochastic integration and L^p-theory of semimartingales. *Ann. Probab.*, 9(1):49–89, 1981.

[5] T. Björk, G. Di Masi, Y. Kabanov, and W. Runggaldier. Towards a general theory of bond markets. *Fin. Stoch.*, 1(2):141–174, 1997.

[6] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Econom.*, 72:637–659, 1973.

[7] G. Cardano. *Liber de Ludo Aleae*. Milano, 1564.

[8] M. Chatelain and C. Stricker. On componentwise and vector stochastic integration. *Math. Finance*, 4(1):57–65, 1994.

[9] M. Chatelain and C. Stricker. Componentwise and vector stochastic integration with respect to certain multi-dimensional continuous local martingales. In *Progress in Probability*, volume 36, pages 319–325. Birkhäuser, 1995.

[10] A.S. Chernyi. Vector stochastic integrals and the fundamental theorems of asset pricing. *Russ. Math. Surveys*, 53(4):866–867, 1998.

[11] G. Choquet. *Topology*. Academic Press, 1966.

[12] C.S. Chou. Sur certaines généralisations de l'inégalité de Fefferman. In *Séminaire de Probabilités XVIII*, volume 1059 of *Lecture Notes in Math.*, pages 219–222. Springer, 1984.

[13] C.S. Chou, P.-A. Meyer, and C. Stricker. Sur les intégrales stochastiques de processus prévisible non bornés. In *Lecture notes in mathematics*, volume 784, pages 128–139. Springer, 1980.

[14] T. Choulli, L. Krawczyk, and C. Stricker. $\mathcal{E}$-martingales and their applications in mathematical finance. *Ann. Probab.*, 26(2):853–876, 1998.

[15] T. Choulli, C. Stricker, and L. Krawczyk. On Fefferman and Burkholder-Davis-Gundy inequalities for $\mathcal{E}$-martingales. *Probab. Theory and Related Fields*, 113:571–597, 1999.

[16] P. Courrège. Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable. In *Sem. Brelot-Choquet-Deny*, volume 7. Publ. Inst. H. Poincaré, 1962-63.

[17] L. Decreusefond. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion. In *Long-Range Dependence: Theory and Application*. Birkhäuser, 2002.

[18] F. Delbaen, P. Monat, W. Schachermayer, M. Schweizer, and C. Stricker. Weighted norm inequalities and hedging in incomplete markets. *Finance Stochast.*, 1(3):181–227, 1997.

[19] F. Delbaen and W. Schachermayer. The existence of absolutely continuous local martingale measures. *The Annals of Applied Probability*, 5(4):926–945, 1995.

[20] F. Delbaen and W. Schachermayer. An inequality for the predictable projection of an adapted process. In *Séminaire de Probabilités XXIX*, volume 1613 of *Lecture Notes in Math.*, pages 17–24. Springer, 1995.

[21] F. Delbaen and W. Schachermayer. The variance-optimal martingale measure for continuous processes. *Bernoulli*, 2:81–106, 1996.

[22] C. Dellacherie. *Capacités et processus stochastiques*. Springer, 1972.

[23] C. Dellacherie and P.-A. Meyer. *Probabilities and Potential*, volume B. North-Holland, 1982.

[24] N. Dinculeanu. *Vector Integration and Stochastic Integration in Banach Spaces*. Wiley, 2000.

[25] C. Doléans-Dade. Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales. *Z. Wahrshc. verw. Gebiete*, 16:181–194, 1970.

[26] C. Doléans-Dade and P.-A. Meyer. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. In *Lecture notes in mathematics*, volume 124, pages 77–107. Springer, 1970.

[27] N. El Karoui and M.-C. Quenez. Dynamic programming and pricing of contingent claims in incomplete markets. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 33(1):29–66, 1995.

[28] R.J. Elliot. *Stochastic Calculus and Applications*. Springer, 1982.

[29] M. Emery. Une topologie sur l'espace des semimartingales. In *Lecture notes in mathematics*, volume 721, pages 260–280. Springer, 1979.

[30] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter, 2002.

[31] H. Föllmer and M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. In M.H.A. Davis and R.J. Elliot, editors, *Applied Stochastic Analysis*, Stochastic Monographs vol. 5. Gordon and Breach, 1990.

[32] H. Föllmer and D. Sondermann. Hedging of non-redundant contingent claims. In W. Hildenbrand and A. Mas-Colell, editors, *Contributions to Mathematical Economics. In Honor of G. Debreu*, pages 205–223. Elsevier Science Publ., North-Holland, 1986.

[33] A. Friedman. *Foundations of Modern Analysis*. Dover, 1982.

[34] L.I. Galtchouk. The structure of a class of martingales. In *Proceedings of the Seminar on Random Processes, Drusininkai*, volume 1, pages 7–32. Academy of Sciences of Lithuanian, 1975.

[35] A.M. Garsia. *Martingale Inequalities: Seminar Notes on Recent Progress*. W.A. Benjamin, 1973.

[36] J.M. Harrison and D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. Econom. Theory*, 20:381–408, 1979.

[37] Sheng-wu He, Jia-gang Wang, and Jia-an Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Science Press, 1992.

[38] K. Itô. Differential equations determining Markov processes. *Zenkoku Shijo Shugaku Danwakai*, 1077:1352–1400, 1942.

[39] K. Itô. Stochastic integrals. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20:519–524, 1944.

[40] J. Jacod. *Calcul stochastique et problémes de martingales*. Lecture Notes in Mathematics 714. Springer-Verlag, 1979.

[41] J. Jacod. Intégrals stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle et changement de filtration. In *Lecture notes in mathematics*, volume 784, pages 161–172. Springer, 1980.

[42] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, 1987.

[43] R. Jarrow and D. Madan. Characterization of complete markets on a brownian filtration. *Math. Fin.*, 1(3):31–43, 1991.

[44] F. John and L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:415–426, 1961.

[45] N. Kazamaki. *Continuous Exponential Martingales and BMO*. Springer, 1994.

[46] A.N. Kolmogorov. Über die analytischen Methoden in der Warscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.*, 104:415–458, 1931.

[47] A.N. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, 1933.

[48] H. Kunita and S. Watanabe. On square integrable martingales. *Nagoya Math. J.*, 30:209–245, 1967.

[49] H. Lebesque. Intégrale, longueur, aire. *Annali di Mat.*, 7(3):231–259, 1902.

[50] R. Long. *Martingale Spaces and Inequalities*. Peking University Press, 1993.

[51] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. Manag. Sci.*, 4:141–183, 1973.

[52] P.-A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. In *Lecture notes in mathematics*, volume 511, pages 245–400. Springer, 1976.

[53] J. Mémin. Espaces de semimartingales et changement de probalité. *Probability Theory and Related Fields*, 52(1):9–39, 1980.

[54] T. J. Morrison. *Functional Analysis*. Wiley, 2001.

[55] M. Métivier. *Semimartingales*. W. de Gruyter, 1992.

[56] O. Nikodým. Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon. *Fundamenta Mathematicae*, 15:131–179, 1930.

[57] R.E. Paley, N. Wiener, and A. Zygmund. Note on random functions. *Math. Z.*, 37:647–668, 1933.

[58] B. Pascal. Kirjeenvaihto P. de Fermat'n kanssa. Julkaistu uudestaan teoksessa *Oeuvres complétes* (1779), 1654.

[59] M. Pratelli. La classe des semimartingales qui permettent d'intégrer les processus optionells. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 986, pages 311–320. Springer, 1983.

[60] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*. Springer, 1990.

[61] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Springer, 1991.

[62] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.

[63] A.N. Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance*. World Scientific, 1998.

[64] A.N. Shiryaev and A.S. Cherny. Vector stochastic integration and the fundamental theorems of asset pricing. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 237:6–49, 2002.

[65] J. Ville. *Etude critique de la notion de collectif*. Gauthier-Villars, 1939.

[66] N. Wiener. Differential space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2:131–174, 1923.

[67] M. Yor. Sur les intégrales stochastiques optionelles et une suite remarquable de formules exponentielles. In *Séminaire de Probabilités X*, volume 511 of *Lecture Notes in Math.*, pages 481–500. Springer, 1976.

[68] M. Yor. En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionelles. In *Séminaire de Probabilités XIII*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 401–426. Springer, 1979.